

Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, Nancy-Université, CNRS.
2, Avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex France

prénom.nom@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé— L'approche multimodèle représente une alternative intéressante et un outil puissant dans l'identification, la commande ou le diagnostic de systèmes complexes. Ce document aborde la stabilité et la reconstruction d'état, dans une perspective de diagnostic, des systèmes non linéaires représentés par un type particulier de multimodèle. Ce type de multimodèle dit *découplé* se caractérise par des sous-modèles sans état commun, par opposition au multimodèle classiquement utilisé dit de *Takagi-Sugeno* où les sous-modèles partagent le même état. Contrairement au multimodèle de Takagi-Sugeno, le multimodèle découplé offre la possibilité d'utiliser un vecteur d'état de dimension différente pour chaque sous-modèle. Des conditions garantissant la convergence de l'erreur d'estimation sont formulées par un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMI).

Mots-clés— Estimation d'état ; systèmes non linéaires ; multimodèle découplé ; diagnostic ; détection de défaut.

I. INTRODUCTION

Les multimodèles [1] constituent une alternative intéressante et un outil puissant dans la modélisation des systèmes non linéaires. L'approche multimodèle est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en un nombre L de zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-modèle. En fonction de la zone où le système évolue, la sortie de chaque sous-modèle contribue plus ou moins à l'approximation du comportement global du système non linéaire. La contribution de chaque sous-modèle est définie par une *fonction de pondération*.

Il a été montré [2] que les multimodèles constituent un outil d'approximation universel. En effet, n'importe quel système non linéaire peut être approximé avec une précision imposée en augmentant le nombre de sous-modèles et en optimisant les fonctions de pondération. Les outils d'analyse des systèmes linéaires peuvent d'autre part être utilisés, au moins partiellement, sur les multimodèles si les sous-modèles sont de type linéaire et pour des fonctions de pondération particulières.

Plusieurs structures permettent d'interconnecter les différents sous-modèles afin de générer la sortie globale du multimodèle. Deux structures essentielles de multimodèles peuvent être distinguées, l'une où les sous-modèles partagent le même vecteur d'état (*multimodèle de Takagi-Sugeno*), l'autre où les sous-modèles sont découplés, chaque sous-modèle possédant alors son propre vecteur d'état (*multimodèle découplé*).

Le multimodèle de Takagi-Sugeno est, à l'heure actuelle, le plus couramment utilisé. L'étude de la stabilité et de

la stabilisation (étroitement liée à l'estimation d'état) des multimodèles de Takagi-Sugeno a fait l'objet de nombreux travaux de recherche (voir [3], [4], [5], [6] et leur bibliographie). Ces travaux s'inscrivent principalement dans la recherche d'une loi de commande stabilisante. Certaines techniques de commande (retour d'état par exemple) ne peuvent être appliquées qu'à la condition de disposer de tout le vecteur d'état (pas toujours accessible). C'est en particulier ce besoin qui au départ a motivé l'étude de la reconstruction d'état.

L'estimation d'état du multimodèle s'effectue en général en utilisant un multiobservateur de type proportionnel (extension de l'observateur proportionnel des systèmes linéaires aux multimodèles). Cependant, d'autres types de multiobservateurs ont également été développés (par exemple, à entrées inconnues [7] et à modes glissants [8]).

Dans la perspective d'une stratégie de surveillance de systèmes représentés par un multimodèle de Takagi-Sugeno, les multiobservateurs ont été utilisés afin de générer des signaux indicateurs de défauts (résidus) [9], [10].

Que ce soit pour la commande ou pour le diagnostic, l'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation d'état s'effectue généralement à l'aide de la seconde méthode de Lyapunov. Des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont établies alors sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles LMIs [11] (Linear Matrix Inequalities) résolues à l'aide d'outils numériques [12].

Peu de travaux, en revanche, abordent l'étude de l'estimation d'état des multimodèles découplés. *Gawthrop* [13] introduit des observateurs pour chaque sous-modèle dans un contexte de synthèse d'une loi de commande adaptative. Il exploite la propriété de découplage des sous-modèles pour calculer les gains des observateurs de façon classique. La reconstruction de l'état est basée sur la connaissance des sorties de chaque sous-modèle. Cette information n'étant pas toujours accessible, l'approche proposée s'avère en général limitée.

Dans cet article nous proposons un moyen de construire un observateur d'état, pour un système non linéaire représenté par un multimodèle découplé, à partir de la connaissance des seules grandeurs accessibles : l'entrée et la sortie du multimodèle (les mesures des sorties des sous-modèles étant indisponibles). Il convient de souligner que la particularité de l'observateur proposé, par rapport à un observateur de type Takagi-Sugeno, est de permettre l'utilisation d'un vecteur d'état de dimension différente pour chaque

sous-modèle. La section 2 présente deux structures de multimodèles caractérisées par l'utilisation d'un état commun ou non. L'étude de la stabilité du multimodèle découplé est traitée dans la section 3. Dans la section 4, des conditions suffisantes (sous forme LMI) sont établies de façon à assurer la convergence l'erreur d'estimation et le placement des valeurs propres de l'observateur. Enfin, la section 5 présente un exemple académique de reconstruction d'état d'un multimodèle découplé et de son application à la détection et à la localisation de défauts de capteurs.

II. STRUCTURES DES MULTIMODÈLES

Plusieurs structures permettent d'interconnecter les différents sous-modèles afin de générer la sortie globale du multimodèle. Deux structures essentielles de multimodèles peuvent être distinguées selon l'utilisation, par les différents sous-modèles, d'un état unique ou de plusieurs états indépendants.

Différentes techniques (linéarisation, optimisation paramétrique) permettent d'estimer les paramètres des sous-modèles pour une structure de multimodèle donnée. Pour davantage de renseignements sur ces techniques, le lecteur peut consulter [1], [14], [15].

A. Multimodèle de Takagi-Sugeno

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno est la plus répandue aussi bien dans l'analyse que dans la synthèse des multimodèles [1]. Elle se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \dot{x}_i(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) C_i x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de mesures. Pour le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'évolution d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice d'entrée et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ la matrice de sortie.

Les $\mu_i(\xi(t))$ sont les *fonctions de pondération* qui assurent un passage progressif entre les sous-modèles. Elles possèdent les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1, \quad \forall t \quad (2a)$$

$$0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots L, \forall t \quad (2b)$$

où ξ est la variable d'indexation qui dépend, par exemple, des variables d'état mesurables et/ou des valeurs du signal d'entrée ou de sortie du système.

Il convient de remarquer qu'un état commun x couple les états x_i des sous-modèles et que le mélange s'effectue à travers l'équation dynamique. Il est possible de montrer, en éliminant les états partiels x_i , que ce multimodèle est analogue à un système à paramètres variables dans le temps :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}(\xi(t))x(t) + \bar{B}(\xi(t))u(t), \\ y(t) &= \bar{C}(\xi(t))x(t),\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\text{où } \bar{A}(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) A_i, \quad \bar{B}(\xi(t)) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) B_i \text{ et} \\ \bar{C}(\xi(t)) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) C_i.\end{aligned}$$

B. Multimodèle découplé

Filev [16] propose un multimodèle issu de l'agrégation des sous-modèles sous la forme d'une structure à états découplés :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t), \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t),\end{aligned}\quad (4)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle et où $u, y, \xi, A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$ ont été définis dans la section précédente.

La sortie globale du multimodèle est réalisée par la somme pondérée des sorties des sous-modèles. Le mélange entre les sous-modèles s'effectue donc à travers l'équation statique. Chaque sous-modèle possède par conséquent son propre espace d'état et y évolue indépendamment en fonction du signal de commande et de son état initial. Il est clair que c'est le découplage entre les sous-modèles qui motive l'intérêt de cette structure. En effet, à la différence du multimodèle de Takagi-Sugeno, le multimodèle découplé permet l'utilisation de sous-modèles comportant un vecteur d'état de dimension différente (à condition toutefois que le vecteur de sortie ait la même dimension). Cette structure de multimodèle est donc adaptée à la modélisation des systèmes fortement non linéaires dont la structure varie (dimension du vecteur d'état variable) en fonction de la zone de fonctionnement.

Notations

Par la suite une matrice P définie positive (négative) sera notée $P > 0$ ($P < 0$) et la transposée d'une matrice P sera notée P^T . Afin d'alléger l'écriture $\mu_i(\xi(t))$ sera abrégée sous la forme $\mu_i(t)$.

III. STABILITÉ DU MULTIMODÈLE DÉCOUPLÉ

L'introduction d'un vecteur d'état augmenté permet de réécrire les relations (4) sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) &= \tilde{C}(t)x(t),\end{aligned}\quad (5)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}(t) &= [\mu_1(t)C_1 \cdots \mu_i(t)C_i \cdots \mu_L(t)C_L] \quad \text{et} \\ x(t) &= [x_1(t) \cdots x_i(t) \cdots x_L(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^L n_i.\end{aligned}$$

Remarques

- Les matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ sont des matrices partitionnées en blocs.
- La matrice de sortie $\tilde{C}(t)$ est une matrice bloc à paramètres variables dans le temps. En effet, les fonctions de pondération $\mu_i(t)$ influent seulement sur les sorties des sous-modèles.

La stabilité du multimodèle découplé peut alors être établie à partir de l'étude des valeurs propres de la matrice d'évolution d'état $\tilde{A}$. On peut remarquer que la matrice $\tilde{A}$ est une matrice bloc diagonale. Elle possède, par conséquent, toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche du plan complexe si et seulement si toutes les valeurs propres de toutes les matrices A_i sont dans le demi-plan gauche du plan complexe.

En conclusion, le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables, à la différence du multimodèle de Takagi-Sugeno où la stabilité dépend des valeurs propres de la matrice d'évolution d'état des sous-modèles mais également des valeurs des fonctions de pondération.

IV. ESTIMATION D'ÉTAT DU MULTIMODÈLE

Cette section aborde l'estimation d'état d'un multimodèle découplé. Il convient de remarquer qu'elle est effectuée en utilisant seulement les mesures disponibles, c'est-à-dire, l'entrée et la sortie du multimodèle (les mesures des sorties de chaque sous-modèle sont indisponibles). Il est donc nécessaire de prendre en considération le mélange entre les sorties des sous-modèles lors de la synthèse de l'observateur afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation.

A. Structure de l'observateur

La structure de l'observateur proposée est une extension de l'observateur à gain proportionnel classiquement utilisé pour les systèmes linéaires. Il se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_i(t) &= A_i \hat{x}_i(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}_i(t) &= C_i \hat{x}_i(t), \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \hat{y}_i(t),\end{aligned}\quad (6)$$

où $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ est l'estimation du vecteur d'état du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle, $y(t)$ la sortie du multimodèle, $\hat{y}(t)$ la sortie reconstruite par l'observateur et $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times p}$ le gain du $i^{\text{ème}}$ observateur à déterminer. La variable de décision ξ est supposée mesurable.

Les équations (6) peuvent s'écrire sous une forme plus condensée en introduisant les matrices partitionnées définies par (5) :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{obs}(t) \hat{x}(t) + \tilde{B} u(t) + \tilde{K} y(t), \\ \hat{y}(t) &= \tilde{C}(t) \hat{x}(t),\end{aligned}\quad (7)$$

avec

$$A_{obs}(t) = \tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}(t) \quad (8)$$

et

$$\tilde{K} = [K_1 \cdots K_i \cdots K_L]^T \in \mathbb{R}^{n \times p}, n = \sum_{i=1}^L n_i. \quad (9)$$

Il convient de remarquer qu'en utilisant la propriété (2a) des fonctions de pondération la matrice $A_{obs}(t)$ admet la réécriture suivante :

$$A_{obs}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \phi_i, \quad (10)$$

$$\phi_i = \tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i, \quad (11)$$

où $\tilde{C}_i$ est une matrice bloc de la forme :

$$\tilde{C}_i = [0 \cdots C_i \cdots 0]. \quad (12)$$

La synthèse de l'observateur consiste à chercher une matrice $\tilde{K}$ assurant que l'erreur d'estimation donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (13)$$

tend vers zéro pour un mélange arbitraire entre les sorties des sous-modèles.

B. Convergence de l'erreur d'estimation

L'étude de la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation (ou α -stabilité de l'observateur) permet de garantir une certaine rapidité de convergence de l'erreur d'estimation et d'imposer ainsi des performances dynamiques à l'observateur.

La convergence de l'erreur d'estimation peut être analysée par exemple en résolvant directement l'équation différentielle :

$$\dot{e}(t) = A_{obs}(t) e(t) \quad (14)$$

qui caractérise la dynamique de l'erreur d'estimation. Cette équation différentielle est obtenue en dérivant l'équation (13) puis en utilisant les équations (5) et (7).

La difficulté pour résoudre cette équation différentielle provient du fait que la matrice $A_{obs}(t)$ est à coefficients variables dans le temps. On utilise ici, afin de contourner cette difficulté, la seconde méthode de Lyapunov qui permet d'étudier la convergence de l'erreur d'estimation sans effectuer l'intégration de l'équation différentielle (14).

Théorème 1. *S'il existe une matrice symétrique et définie positive P , une matrice G et un scalaire positif α vérifiant les LMI's suivantes :*

$$(\tilde{A} + \alpha I)^T P + P(\tilde{A} + \alpha I) - (G \tilde{C}_i)^T - G \tilde{C}_i < 0$$

pour $i = 1 \dots L$, alors l'observateur (6) est exponentiellement convergent. Le gain de l'observateur est donné par $K = P^{-1}G$ et I est la matrice identité de dimension appropriée.

Preuve : La démonstration de ce Théorème est effectuée en considérant une fonction candidate de Lyapunov de la forme :

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T. \quad (15)$$

La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est garantie si :

$$\exists P = P^T > 0, \alpha > 0 : \dot{V}(e(t)) + 2\alpha V(e(t)) < 0, \quad (16)$$

où α est le *taux de décroissance* qui sert à quantifier la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation.

La dérivée par rapport au temps de la fonction (15) est donnée par :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t), \quad (17)$$

soit encore en introduisant (14) :

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) \{A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t)\} e(t). \quad (18)$$

En utilisant la fonction de Lyapunov (15) et sa dérivée donnée par (18), l'inégalité (16) devient :

$$e^T(t) \{A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) + 2\alpha P\} e(t) < 0, \quad (19)$$

qui est une forme quadratique en $e(t)$.

Une *condition nécessaire et suffisante* pour assurer la convergence exponentielle est de respecter :

$$A_{obs}^T(t)P + PA_{obs}(t) + 2\alpha P < 0 \quad (20)$$

qui s'écrit également en remplaçant $A_{obs}(t)$ par (10) :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(t) \phi_i^T P + P \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \phi_i + 2\alpha P < 0. \quad (21)$$

Compte tenu de la propriété (2a) des fonctions de pondération l'inégalité (21) est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(t) \phi_i^T P + P \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \phi_i + \sum_{i=1}^L \mu_i(t) 2\alpha P < 0. \quad (22)$$

La propriété (2b) des fonctions de pondération permet alors de majorer l'inégalité précédente comme suit :

$$\phi_i^T P + P \phi_i + 2\alpha P < 0, \quad i = 1 \dots L \quad (23)$$

et d'établir ainsi une *condition suffisante* assurant la convergence de l'erreur d'estimation. En remplaçant ϕ_i par (11), l'inégalité (23) devient :

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} - (\tilde{K} \tilde{C}_i)^T P - P \tilde{K} \tilde{C}_i + 2\alpha P < 0, \quad i = 1 \dots L. \quad (24)$$

Il convient de remarquer que l'inégalité précédente est non linéaire (bilinéaire) par rapport aux variables $\tilde{K}$ et P . Il n'est donc pas possible de calculer une solution en utilisant directement les méthodes classiques de résolution des LMIs. Cependant, en posant $G = P \tilde{K}$, l'inégalité matricielle (24) s'écrit :

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} - (G \tilde{C}_i)^T - G \tilde{C}_i + 2\alpha P < 0 \quad i = 1 \dots L \quad (25)$$

qui est bien une LMI en P et G . Le Théorème 1 est finalement démontré en regroupant les termes en P apparaissant dans les inégalités précédentes. $\square$

Remarquons par ailleurs que la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation est une notion plus forte par rapport à la convergence asymptotique. En effet, la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est obtenue en considérant $\alpha = 0$ dans le Théorème 1.

C. Placement des valeurs propres

Le placement des valeurs propres de l'observateur, dans une région du plan complexe, permet au concepteur d'assurer une dynamique supérieure à celle du système et d'obtenir de bonnes performances dynamiques (degré d'amortissement, rapidité du transitoire, etc.) de l'erreur d'estimation.

Il convient de souligner qu'assurer la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation revient à placer les valeurs propres de l'observateur à gauche d'une droite verticale coupant l'axe imaginaire à $-\alpha$ dans le plan complexe (la partie réelle des valeurs propres de l'observateur est inférieure à $-\alpha$). En revanche, aucune contrainte sur le placement de la partie imaginaire des valeurs propres de l'observateur n'est imposée dans cette approche. Des dynamiques à fortes oscillations peuvent par conséquent apparaître.

Il est possible d'envisager, pour pallier à ce problème, le placement des valeurs propres de l'observateur dans une autre région S du plan complexe. Dans [17] une approche générale permettant de caractériser l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région déterminée du plan complexe en termes de LMIs est présentée.

La région $S(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r, \Re(z) < -\alpha\}$, définie par l'intersection entre un disque (centré à l'origine, de rayon r) et le plan complexe à gauche d'une droite d'abscisse $-\alpha$, permet d'imposer une vitesse de convergence et de borner la partie imaginaire des valeurs propres assurant ainsi un bon amortissement de l'erreur d'estimation.

Théorème 2. *Les valeurs propres de l'observateur (6) sont placées dans la région $S(\alpha, r)$ du plan complexe s'il existe une matrice symétrique et définie positive P , une matrice G et deux scalaires positifs α et r vérifiant les LMIs suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -rP & P\tilde{A} - G\tilde{C}_i \\ \tilde{A}^T P - (G\tilde{C}_i)^T & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (\tilde{A} + \alpha I)^T P + P(\tilde{A} + \alpha I) - (G\tilde{C}_i)^T - G\tilde{C}_i < 0,$$

pour $i = 1 \dots L$. Le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$ et I est la matrice identité de dimension appropriée.

Preuve : La démonstration complète de ce Théorème est omise ici. La ligne directrice pour l'obtenir fait appel à la notion de la *D-stabilité* d'une matrice présentée dans [17]. Une matrice A est dite D-stable si toutes ses valeurs propres sont contenues à l'intérieur d'une région D du plan complexe.

Par exemple, la matrice A est D-stable dans la région définie par un disque centré à l'origine et de rayon r si la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} -rP & AP \\ (AP)^T & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad P = P^T > 0. \quad (26)$$

La première inégalité du Théorème 2, assurant la D-stabilité dans le disque, est obtenue en remplaçant A par $A_{obs}(t)$ dans (26) puis en utilisant les propriétés (2) des fonctions de pondération et en effectuant un changement de variable de la forme $G = P \tilde{K}$. La deuxième inégalité du Théorème 2, permettant la D-stabilité à gauche de la droite d'abscisse $-\alpha$, est issue directement du Théorème 1. L'intersection entre les deux régions est imposée en satisfaisant les deux inégalités simultanément. $\square$

V. EXEMPLE

A. Estimation d'état du multimodèle

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 2$ sous-modèles. Les valeurs numériques des matrices A_i , B_i et C_i sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1 \\ 1 & -0.7 & 0 \\ -2 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.7 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [1 \quad 0.2 \quad 0.5]^T, \quad B_2 = [0.5 \quad 1]^T,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 \\ 0.7 & -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -1 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

La variable d'indexation ξ est ici le signal de commande $u(t)$. Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation des fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \omega_i(\xi(t)) / \sum_{j=1}^L \omega_j(\xi(t)), \quad \text{où} \quad (27)$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right), \quad (28)$$

de dispersion $\sigma = 0.4$ et de centres $c_i = [0.25, 0.75]$.

Les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ sont toutes dans le demi-plan gauche du plan complexe :

$$\lambda = [-1.48 \pm 1.16i, \quad -0.24, \quad -0.72, \quad -0.18],$$

le multimodèle est donc stable.

Une solution, satisfaisant le Théorème 2, est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.373 & -0.071 & -0.136 & 0.023 & -0.085 \\ -0.071 & 0.452 & 0.186 & -0.001 & -0.040 \\ -0.136 & 0.186 & 0.225 & 0.017 & 0.020 \\ 0.023 & -0.001 & 0.017 & 0.118 & -0.043 \\ -0.085 & -0.040 & 0.020 & -0.043 & 0.714 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -0.268 & 0.227 & -0.084 & -0.008 & 0.064 \\ -0.031 & 0.183 & -0.299 & -0.300 & -0.148 \end{bmatrix}^T,$$

pour un taux de décroissance $\alpha = 0.18$ et un rayon $r = 1.89$.

Il est possible de constater la bonne estimation des états des sous-modèles sur les figures 1 et 2. L'erreur à l'origine du temps provient de la différence entre les conditions initiales de l'observateur et celles du multimodèle.

B. Application au diagnostic

Il est possible d'exploiter l'observateur d'état proposé dans une perspective de diagnostic et de localisation des défauts de capteurs δ d'un système non linéaire décrit par un multimodèle découplé. La sortie "mesurée" du multimodèle $\tilde{y}(t)$ est donnée par :

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \delta(t) + \epsilon(t); \quad (29)$$

où $\delta(t)$ est le vecteur des défauts et $\epsilon(t)$ le bruit de mesure (ici, de moyenne nulle et de variance égale à 1).

Un banc d'observateurs est utilisé afin de générer des signaux indicateurs de défaut (résidus) $r_{i,j}$ calculés à partir de la différence entre la $i^{\text{ème}}$ sortie du multimodèle et la $i^{\text{ème}}$ sortie estimée avec l'observateur j (les principes du banc d'observateurs n'étant pas développés ici, le lecteur peut consulter [18]).

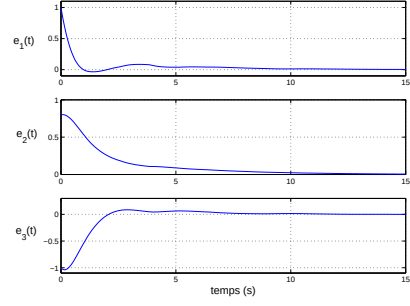


Fig. 1. Erreur d'estimation d'état du sous-modèle 1

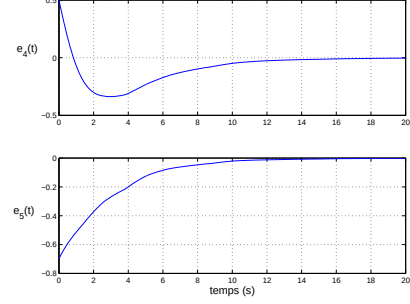


Fig. 2. Erreur d'estimation d'état du sous-modèle 2

Chaque observateur d'état est piloté par les différentes sorties du multimodèle. Dans notre exemple, l'observateur 1 est piloté par la sortie y_1 , l'observateur 2 par la sortie y_2 et l'observateur 3 par le vecteur complet de sortie $y = [y_1 \quad y_2]^T$. Ce banc d'observateurs associé à une logique de décision permet une localisation aisée des défauts de capteur du système.

	$r_{1,1}$	$r_{2,1}$	$r_{1,2}$	$r_{2,2}$	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$
δ_1	?	?	1	0	?	?
δ_2	0	1	?	?	?	?

TABLE I

TABLE DE SIGNATURES THÉORIQUES

Une table des signatures théoriques (Tableau I) est dressée afin de déterminer comment les résidus $r_{i,j}$ sont affectés en présence d'un défaut δ_i et prendre ainsi une décision. Sur la table de signatures théoriques, un "1" traduit qu'il est certain que le défaut δ_i affecte le résidu $r_{i,j}$, un "0" qu'il est certain que le défaut δ_i n'affecte pas le résidu $r_{i,j}$ et un "?" qu'il est impossible de se prononcer.

La table des signatures est élaborée à partir des considérations suivantes :

1. L'observateur 1 reconstruit la sortie du multimodèle en utilisant seulement la sortie y_1 . Si cette sortie présente un défaut alors il y a une mauvaise estimation de l'état et les résidus $r_{i,1}$ peuvent être affectés. Il convient de souligner cependant qu'il est difficile de prédire l'évolution de l'estimation d'état en présence d'un défaut sur la sortie y_1 à cause de la non linéarité de l'observateur. Par conséquent, il est dangereux de se prononcer affirmativement sur l'absence de défaut sur la sortie y_1 en analysant la nullité des résidus (un "?" apparaît sur la table des signatures). En effet, des phénomènes dits de compensation peuvent apparaître et les défauts peuvent être masqués (les résidus $r_{i,1}$ pouvant rester nuls).

2. Si la sortie y_1 ne présente pas de défaut alors l'estimation d'état est correctement effectuée. Par conséquent, en présence d'un défaut sur la sortie y_2 le résidu $r_{2,1}$ est éloigné de zéro (sensibilité au défaut δ_2) alors que le résidu $r_{1,1}$ demeure insensible à ce même défaut. Il est alors possible de tirer une conclusion positive sur la présence d'un défaut δ_2 si les résidus $r_{i,1}$ présentent simultanément la signature : $r_{1,1} = 0$ et $r_{2,1} = 1$.

Une démarche similaire est adoptée afin d'élaborer les signatures de l'observateur 2. Finalement, l'observateur 3 génère une mauvaise estimation d'état en présence d'un défaut de capteur δ_i sur n'importe quelle sortie. La signature de cet observateur est difficile à déterminer car l'évolution des résidus $r_{i,3}$ est difficile à établir. Les résidus obtenus avec cet observateur servent donc à confirmer (et non à prendre) une décision.

La figure 3 illustre l'évolution des résidus générés par le banc des multiobservateurs. Le défaut injecté sur la sortie $y_1(t)$ intervient à $t = 5$ et disparaît à $t = 7.5$. Un autre défaut apparaît sur la sortie $y_2(t)$ à $t = 12.5$ et disparaît à $t = 15$. Dans les deux cas, ils sont constitués d'un créneau d'amplitude constante égale à 1.

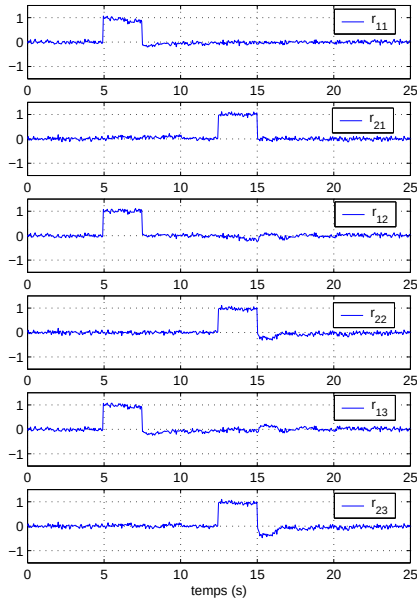


Fig. 3. Évolution des résidus $r_{i,j}$

La détection et la localisation des défauts de capteur sont effectuées en analysant la configuration des résidus $r_{i,1}$ et $r_{i,2}$. Entre les instants $5 \leq t \leq 7.5$ les résidus $r_{1,2}$ et $r_{2,2}$ correspondent à la configuration d'un défaut sur la sortie y_1 . Cette information est confirmée par les résidus générés avec les deux autres observateurs. En appliquant un raisonnement similaire à la configuration des résidus $r_{1,1}$ et $r_{2,1}$, il est possible de conclure qu'un défaut sur la sortie y_2 apparaît entre les instants $12.5 \leq t \leq 15$.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Un observateur d'état construit à partir de la représentation d'un système non linéaire par un multimodèle découplé a été présenté. Contrairement à l'observateur de type Takagi-Sugeno, l'observateur proposé permet d'utiliser un vecteur d'état de dimension différente pour chaque sous-modèle.

Des conditions suffisantes permettant d'imposer des performances dynamiques à l'observateur (placement des valeurs propres de l'observateur dans une région du plan complexe) ont été données en utilisant un formalisme LMI. Un exemple académique a permis de montrer, d'une part la bonne qualité de l'estimation d'état obtenue et, d'autre part, l'utilisation de ce type d'observateur dans la mise en place d'une stratégie de diagnostic des défauts de capteurs d'un système non linéaire.

Parmi les points pouvant constituer l'objet de travaux ultérieurs, on peut mentionner l'utilisation d'autres fonctions candidates de Lyapunov, des *fonctions polyquadratiques* par exemple, afin de réduire le conservatisme des conditions obtenues. Il est également possible d'envisager l'extension de la démarche présentée à d'autres types d'observateurs, par exemple, observateur proportionnel intégral et observateur à entrées inconnues.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Murray-Smith et T.A. Johansen. *Multiple model approaches to modelling and control*. Taylor & Francis, 1997.
- [2] T.A. Johansen, R. Shorten, et R. Murray-Smith. On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 8(3) :297–313, 2000.
- [3] K. Tanaka et M. Sugeno. Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method. In *NAFIPS*, pages 133–136, Toronto, Canada, 1990.
- [4] Y. Blanco, W. Perruquetti, et P. Borne. Stability and stabilization of nonlinear systems and Takagi-Sugeno's fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, 7(3) :221–240, 2001.
- [5] M. Chadli. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multi-modèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002.
- [6] T. M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, et H. Tirmant. Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy sets and systems*, 157(9) :1248–1259, 2006.
- [7] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, et D. Maquin. Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model. In *11th IFAC Symposium on Automation in Mineral and Metal processing*, Nancy, France, 2004.
- [8] R. Palm et P. Bergstern. Sliding mode observer for a Takagi-Sugeno fuzzy system. In *The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 2, pages 665–670, San Antonio, 2000.
- [9] C.J. Lopez-Toribio, R.J. Patton, et S. Daley. Takagi-Sugeno fuzzy fault-tolerant control of an induction motor. *Neural Computing & Applications*, 9(1) :19–28, 2000.
- [10] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par une approche multi-modèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004 (in french).
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, P.A., SIAM studies in applied mathematics edition, 1994.
- [12] J. VanAntwerp et R. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4) :363–385, 2000.
- [13] P.J. Gawthrop. Continuous-time local state local model networks. In *IEEE Conference on Systems, Man & Cybernetics*, pages 852–857, Vancouver, Canada, 1995.
- [14] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2000.
- [15] A.N. Venkat, P. Vijaysai, et R.D. Gudi. Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6) :473–488, 2003.
- [16] D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290, 1991.
- [17] M. Chilali. *Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multicritère*. Thèse de doctorat, Université Paris-IX Dauphine, 1996.
- [18] P. Frank. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy-A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474, 1990.