

# Synthèses d'observateurs pour systèmes Takagi-Sugeno singuliers à entrées inconnues

## Design of observers for T-S fuzzy descriptor systems with unknown inputs

B. Marx

J. Ragot

Institut National Polytechnique de Lorraine

CRAN UMR 7039 CNRS-INPL-UHP

2 avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex, France

e-mail : {benoit.marx,jose.ragot}@ensem.inpl-ensem.fr

### Résumé :

Cet article traite de la synthèse d'observateurs pour systèmes singuliers Takagi-Sugeno soumis à des entrées inconnues. Les entrées inconnues sont présentes dans l'équation d'état et dans celle de mesure. Les observateurs proposés sont non singuliers afin de faciliter leur mise en œuvre. Des conditions suffisantes de découplage de l'erreur d'estimation par rapport aux entrées inconnues sont données, et la détermination des paramètres de l'observateur est faite par résolution de LMI. L'estimation d'état permet la reconstruction des entrées inconnues. Lorsque les conditions de découplage parfait vis à vis des entrées inconnues ne sont pas vérifiées, il est proposé de synthétiser un observateur minimisant le gain  $\mathcal{L}_2$  des entrées inconnues vers l'erreur d'estimation. Les différents résultats sont établis pour les systèmes à temps continu et à temps discret.

### Mots-clés :

systèmes singuliers Takagi-Sugeno, estimation d'état, observateurs à entrées inconnues, optimisation LMI

### Abstract:

This paper presents a method for state-estimation of Takagi-Sugeno descriptor systems affected by unknown inputs. Unknown inputs appear not only in the dynamical equation but also in the measurement equation. The proposed observers are in non descriptor form to be easily implemented. Sufficient existence conditions of the unknown input observer are given. Strict LMI optimization is used to determine the gain of the observer. The unknown input recovering is derived from the state estimation. If the unknown input decoupling is not verified, an observer is designed in order to minimize the  $\mathcal{L}_2$ -gain from the unknown input to the state estimation error. The results are established for both the continuous and the discrete time case.

### Keywords:

T-S descriptor system, state estimation, unknown input observer, LMI optimization.

## 1 Introduction

Le modèle de Takagi-Sugeno (TS) [8] est largement utilisé pour sa propriété d'approximateur universel de modèles non linéaires. Durant ces vingt dernières années, la commande et l'observation des systèmes TS sont devenus des problèmes clefs, suscitant de nombreux travaux. Par exemple, la stabilité et la commande des systèmes TS sont étudiées dans [13] par résolutions d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Des conditions LMI moins conservatives sont proposées pour la commande et l'observation dans [9]; [12] propose une approche par fonctions de Lyapunov multiples.

Comme le montre [4], le formalisme singulier est attirant de par les possibilités offertes par les faisceaux matriciels pour modéliser les systèmes algébro-différentiels où des contraintes statiques et des comportements impulsifs apparaissent (relations de maillage d'un réseau, système mécanique contraint, etc.).

Les formalismes TS et singuliers étant adaptés à la représentation de systèmes, la combinaison des deux a été naturellement introduite par [10], puis [11] dans le cadre de la poursuite de modèles non linéaires. Le contrôle par retour de sorties et la commande  $H_\infty$  font l'objet de [7] et [15] respectivement. Dans [14], la com-

mande de systèmes singuliers TS (SSTS) est abordée par des techniques de systèmes intervalle. Néanmoins le problème de l'estimation en présence d'entrées inconnues semble rester un problème ouvert.

Pourtant, la synthèse d'observateur à entrées inconnues (OEI) est essentielle, en effet il est rarement possible de mesurer tous les signaux entrant d'un système. De plus cette classe d'observateurs est largement utilisée dans le domaine du diagnostic de fautes. La synthèse d'OEI a été étudiée pour les systèmes non singuliers [5], pour les systèmes singuliers [6], pour les systèmes TS [1], mais pas dans le cadre des SSTS.

Cet article propose deux méthodes de synthèse d'observateurs pour les SSTS en présence d'entrées inconnues (EI). Premièrement, lorsqu'une condition de découplage parfait de l'estimation vis à vis des EI est vérifiée, un OEI est proposé. Sa synthèse repose sur la résolution de LMI. Dans ce cas, la reconstruction des EI est possible. Deuxièmement, quand la condition de découplage parfait n'est pas vérifiée on construit un observateur dans le but minimiser le transfert  $\mathcal{L}_2$  des EI vers l'erreur d'estimation. Dans les deux cas, l'observateur est sous forme non singulière afin de faciliter sa mise en œuvre. Tous les résultats sont détaillés à la fois en temps continu et en temps discret.

Le plan de cette note est le suivant. La section 2 précise le cadre de notre étude. La synthèse d'OEI est traitée dans la partie 3. En section 4, est abordée la reconstruction des entrées inconnues. Enfin la synthèse d'observateurs  $\mathcal{L}_2$  fait l'objet de la section 5. La dernière partie est dévolue à un exemple d'application.

## 2 Systèmes singuliers T-S

Commençons par définir la classe des systèmes étudiés. Un système singulier TS est défini, dans le cas continu par (1-2), et dans le cas dis-

cret par (3-4).

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i d(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (2)$$

$$E x_{k+1} = \sum_{i=1}^N h_i(w_k) (A_i x_k + B_i u_k + D_i d_k) \quad (3)$$

$$y_k = Cx_k + Gd_k \quad (4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  l'entrée de commande,  $d \in \mathbb{R}^q$  l'entrée inconnue (perturbations, bruits d'actionneur, etc.), et  $y \in \mathbb{R}^m$  la mesure des sorties. Les matrices  $E$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $C$  et  $G$  sont supposées constantes et connues. Les fonctions d'activations normalisées, notées  $h_i(w)$  pour  $i = 1, \dots, N$ , vérifient les propriétés suivantes.

$$0 \leq h_i(w(t)) \leq 1 \quad \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) = 1 \quad (5)$$

$$0 \leq h_i(w_k) \leq 1 \quad \sum_{i=1}^N h_i(w_k) = 1 \quad (6)$$

La variable de décision  $w$  est supposée être accessible en temps réel, et dépendre des entrées  $u$  ou des sorties  $y$ .

L'hypothèse de matrices  $E$  et  $C$  uniques n'est pas fondamentalement restrictive. En effet les différentes matrices  $A_i$  prennent en compte les variations de paramètres où les changements de points de fonctionnement. La matrice  $E$  traduisant la structure du système, il n'est pas abusif de la considérer constante. De même la matrice  $C$  dépend de la nature et de la localisation des capteurs, lesquelles ne dépendent généralement pas du point de fonctionnement du système.

## 3 Synthèse d'observateurs à entrées inconnues

Dans cette partie, on cherche à construire un multi-observateur à entrées inconnues. La structure de l'observateur proposé est (7-8) dans le

cas continu, et (9-10) dans le cas discret.

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) (N_i z(t) + M_i u(t) + L_i y(t)) \quad (7)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + T_2 y(t) \quad (8)$$

$$z_{k+1} = \sum_{i=1}^N h_i(w_k) (N_i z_k + M_i u_k + L_i y_k) \quad (9)$$

$$\hat{x}_k = z_k + T_2 y_k \quad (10)$$

L'objectif de la synthèse est de déterminer les gains de l'OEI, autrement dit les matrices  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$  et  $T_2$ , afin que l'estimation de l'état  $\hat{x}$  converge asymptotiquement vers l'état  $x$  du système (1-2) (resp. (3-4)). Il faut donc que l'erreur d'estimation définie par  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  (ou  $e_k = x_k - \hat{x}_k$ ) converge vers zéro, quand  $t \rightarrow \infty$  (resp. quand  $k \rightarrow \infty$ ) quelles que soient les entrées inconnue, les commandes, et l'état initial du système.

Dans cette section, on donne les conditions suffisantes d'existence de l'OEI. La première condition est une condition structurelle de découplage des entrées inconnues. La deuxième est une condition de solvabilité d'un système de LMI garantissant l'existence des gains de l'OEI assurant la convergence de l'erreur d'estimation. La solution des LMI permet alors d'obtenir les gains de l'OEI.

Les conditions suffisantes d'existence de l'observateur (7-8) sont donnée dans le théorème suivant.

**Theorème 1** *Il existe un observateur à entrées inconnues (7-8) pour (1-2) si la relation*

$$\text{rang } X = \text{rang} \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_N \\ I_N \otimes G \end{bmatrix} + n + \text{rang } G \quad (11)$$

*est vérifiée et s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $\underline{P} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m(N+1))}$  solutions, pour  $i = 1, \dots, N$ , des LMI suivantes*

$$\begin{aligned} & PYX^+Y_i + \underline{P}X^+Y_i \\ & + (YX^+Y_i)^T P + (X^+Y_i)^T \underline{P}^T < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\otimes$  est le produit de Kronecker, où  $X^+$  est la pseudo inverse de  $X$ , et où  $X^\perp = I - XX^+$ . Les matrices  $X \in \mathbb{R}^{(n+m(N+1)) \times (n+q(N+1))}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times (n+q(N+1))}$  et  $Y_i \in \mathbb{R}^{(n+m(N+1)) \times n}$  sont définies par

$$X = \left[ \begin{array}{cc|ccc} E & 0 & D_1 & \dots & D_n \\ C & G & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_N & \otimes & G \end{array} \right] \quad (13)$$

$$Y = \left[ \begin{array}{cc|c} I_n & 0_{n \times q} & 0_{n \times Nq} \end{array} \right] \quad (14)$$

$$Y_i = \left[ \begin{array}{c} A_i \\ \hline 0_{m \times n} \\ e_i \otimes C \end{array} \right] \quad (15)$$

$e_i$  désigne le vecteur colonne de composantes nulles sauf la  $i^{\text{ème}}$  égale à 1.

**Preuve.** Premièrement, on montre que (11) assure le découplage de l'estimation par rapport aux EI. Deuxièmement, on établit la convergence de l'erreur d'estimation par résolution LMI.

L'erreur d'estimation de l'état  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est donnée par

$$e(t) = x(t) - z(t) - T_2 C x(t) - T_2 G d(t) \quad (16)$$

Supposons qu'il existe deux matrices  $T_1$  et  $T_2$  telles que

$$T_1 E + T_2 C = I_n \quad (17)$$

$$T_2 G = 0 \quad (18)$$

Avec (17) et (18), l'erreur d'estimation devient  $e(t) = T_1 E x(t) - z(t)$ . Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= T_1 E \dot{x}(t) - \dot{z}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) [T_1 (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i d(t)) - N_i z(t) - M_i u(t) - L_i y(t)] \end{aligned}$$

autrement dit

$$\begin{aligned} e(t) &= \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) [N_i e(t) + (T_1 B_i - M_i) u(t) \\ &+ (T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C) x(t) \\ &+ (T_1 D_i - L_i G) d(t)] \end{aligned} \quad (19)$$

Finalement, on a

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^N h_i(w(t)) N_i e(t) \quad (20)$$

si, pour  $i = 1, \dots, N$ , les contraintes suivantes sont satisfaites

$$I_n = T_1 E + T_2 C \quad (21)$$

$$0 = T_2 G \quad (22)$$

$$0 = T_1 A_i - N_i T_1 E - L_i C \quad (23)$$

$$0 = T_1 B_i - M_i \quad (24)$$

$$0 = T_1 D_i - L_i G \quad (25)$$

Afin de vérifier les contraintes précédentes, on introduit un paramètre  $K_i$  (31) dans (23). Les contraintes deviennent alors

$$N_i = T_1 A_i + K_i C \text{ est stable} \quad (26)$$

$$I_n = T_1 E + T_2 C \quad (27)$$

$$0 = T_2 G \quad (28)$$

$$0 = T_1 D_i + K_i G \quad (29)$$

$$M_i = T_1 B_i \quad (30)$$

$$L_i = N_i T_2 - K_i \quad (31)$$

Satisfaire ces contraintes (26-29) revient à trouver  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times (n+m(N+1))}$  telle que

$$\Theta X = Y \quad (32)$$

$$N_i = \Theta Y_i \text{ est stable} \quad (33)$$

où  $\Theta$ , est définie ci-dessous

$$\Theta = [ T_1 \quad T_2 \mid K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_N ] \quad (34)$$

L'équation (32) admet une solution en  $\Theta$  si et seulement si (35) est vérifiée.

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \text{rang} X \quad (35)$$

Avec (14) et (13), il vient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = n + \text{rang} G + \text{rang} \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_N \\ I_N \otimes G \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} X = \text{rang} \left[ \begin{array}{cc|ccc} E & 0 & D_1 & \dots & D_n \\ C & G & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_N & \otimes & G \end{array} \right]$$

De ce fait (35) est équivalent à (11). Si (11) est vérifiée, l'équation (32) a les solutions  $\Theta$  de la forme

$$\Theta = Y X^+ + Z X^\perp \quad (36)$$

où  $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n+m(N+1))}$  est une matrice arbitraire, et où  $X^\perp = I - X X^+$ .

Avec (33) et (36), les matrices  $N_i$  s'écrivent  $N_i = Y X^+ Y_i + Z X^\perp Y_i$ . S'il existe une matrice  $Z$  telle que les  $N_i = Y X^+ Y_i + Z X^\perp Y_i$  soient stables, alors l'erreur d'estimation converge vers zéro. De ce fait, la convergence de l'observateur est assurée s'il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive telle que  $N_i^T P + P N_i < 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ . En définissant  $\underline{P} = P Z$  on obtient (12). ■

Ce résultat est aisément étendu au cas discret.

**Corollaire 1** Il existe un observateur (9-10) pour (3-4) si la condition (11) est satisfaite et s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $\underline{P} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m(N+1))}$  vérifiant, pour  $i = 1, \dots, N$ , les LMI suivantes.

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & (X^\perp Y_i)^T \underline{P}^T \\ \underline{P} (X^\perp Y_i) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

où  $\Phi_i$  est définie par

$$\begin{aligned} \Phi_i &= (Y X^+ Y_i)^T P (Y X^+ Y_i) - P \\ &+ (Y X^+ Y_i)^T \underline{P} (X^\perp Y_i) \\ &+ (X^\perp Y_i)^T \underline{P}^T (Y X^+ Y_i) \end{aligned} \quad (38)$$

**Preuve.** La preuve est similaire au cas continu. Seule la condition de convergence de  $e(t)$  diffère et devient l'existence de  $P = P^T > 0$  vérifiant  $N_i^T P N_i - P < 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ . En posant  $P Z = \underline{P}$ , on obtient (37). ■

Finalement la synthèse d'OEI pour SSTS à temps continu (resp. temps discret) se résume par la procédure suivante.

- Pas 1. Vérifier la condition de découplage (11)
- Pas 2. Résoudre les LMI (12) (resp. (37)) en  $P$  et  $\underline{P}$ .

– *Pas 3.* Calculer  $Z$  avec  $Z = P^{-1}\underline{P}$ ,  $\Theta$  est obtenu par (36). Les matrices  $N_i$ ,  $M_i$  et  $L_i$  sont calculées par (26),(30) et (31) respectivement.

Pour améliorer les performances de l’OEI, on peut utiliser les régions LMI [3] permettant de placer les dynamiques, par exemple en imposant le taux de convergence ou l’amortissement. En effet, une région LMI, notée  $\mathcal{D}$ , est un polytope convexe sous-ensemble du plan complexe

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T\} \quad (39)$$

où  $\alpha$  est une matrice symétrique, et où  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ . L’intersection de différentes régions LMI permet d’imposer simultanément plusieurs contraintes de localisation des dynamiques. Une matrice est dite  $\mathcal{D}$ -stable si toutes ses valeurs propres sont dans  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 1** Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est  $\mathcal{D}$ -stable, si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$\alpha \otimes X + \beta \otimes (XA)^T + \beta^T \otimes (XA) < 0 \quad (40)$$

Une condition suffisante pour que  $\sum_{i=1}^N h_i(w)N_i$  soit  $\mathcal{D}$ -stable est que tous les sommets  $N_i$  du polytope  $N_i$  soient  $\mathcal{D}$ -stables. De ce fait, les dynamiques de l’erreur d’estimation sont dans une région  $\mathcal{D}$  définie par  $\alpha$  et  $\beta$ , s’il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $\underline{P} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m+N(n_u+m))}$  solutions, pour  $i = 1, \dots, N$ , des LMI suivantes.

$$\alpha \otimes P + \beta \otimes (PYX^+Y_i + \underline{P}X^\perp Y_i)^T + \beta^T \otimes (PYX^+Y_i + \underline{P}X^\perp Y_i) < 0 \quad (41)$$

et  $Z$  est donné par  $Z = P^{-1}\underline{P}$ .

#### 4 Estimation des entrées inconnues

Le but de cette partie est d’utiliser l’estimation de l’état pour estimer les entrées inconnues.

Cela est possible à un instant  $t$  si les EI sont linéairement indépendantes, c’est à dire si

$$\text{rang } M(t) = q \quad (42)$$

où la matrice d’incidence des EI, notée  $M(t)$  est donnée par

$$M(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N h_i(w(t))D_i \\ G \end{bmatrix} \quad (43)$$

Quand (42) est vérifié,  $M(t)$  est de plein rang colonne, et la pseudo inverse à gauche, notée  $M(t)^G$ , existe et est définie par

$$M(t)^G = (M(t)^T M(t))^{-1} M(t)^T \quad (44)$$

Si (42) est vérifiée, alors l’estimée des EI, notée  $\hat{d}(t)$ , est donné par

$$\hat{d}(t) = M(t)^G \begin{bmatrix} E\hat{x} - \sum_{i=1}^N h_i(w(t))(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t)) \\ y(t) - C\hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

L’erreur d’estimation des EI, définie par  $\tilde{d}(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ , est alors

$$\tilde{d}(t) = -M(t)^G \begin{bmatrix} -E\dot{e}(t) + \sum_{i=1}^N h_i(w(t))A_i e(t) \\ C e(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$\tilde{d}(t)$  converge vers zéro, en effet  $e(t)$  converge vers zéro.

L’estimation des EI nécessite la dérivation de  $\hat{x}(t)$ . La dérivation d’un signal n’est pas une opération triviale du point de vue numérique, car très sensible aux hautes fréquences. Néanmoins, le signal à dériver est obtenu en sortie de l’observateur dont la bande passante peut être choisie afin de limiter la sensibilité en hautes fréquences.

En temps discret, lorsque  $M_k$  (47) est de plein rang colonne, l’estimée des EI est (48).

$$M_k = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N h_i(w_k)D_i \\ G \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\hat{d}_k = M_k^G \begin{bmatrix} E\hat{x}(k+1) - \sum_{i=1}^N h_i(w_k) \\ (A_i\hat{x}_k + B_i u_k) \\ y_k - C\hat{x}_k \end{bmatrix} \quad (48)$$

L’estimation des EI à l’instant  $k$  est disponible à l’instant  $k + 1$ , en effet,  $\hat{d}_k$  dépend de  $\hat{x}_{k+1}$ .

## 5 Synthèse d'observateurs $\mathcal{L}_2$

L'objectif de cette section est de synthétiser un observateur minimisant l'influence des EI sur l'estimation, lorsque la condition de découplage (11) n'est pas satisfaite. Le critère de minimisation choisi est la norme  $\mathcal{L}_2$  du gain entre les EI et l'erreur d'estimation.

Comme il a été vu lors de la synthèse de l'OEI, l'erreur d'estimation  $e$  est régie par un système TS non singulier (19). On utilisera donc le lemme suivant concernant la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un système TS non singulier dans le but de borner le gain  $\mathcal{L}_2$  des EI vers l'estimation.

**Lemme 2** [2] *Soit un système TS à temps continu (resp. discret) défini par (49-50) (resp. (51-52)).*

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N h_i(w(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (49)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i(w(t))C_i x(t) \quad (50)$$

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N h_i(w_k)(A_i x_k + B_i u_k) \quad (51)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^N h_i(w_k)C_i x_k \quad (52)$$

Ce système est stable et satisfait  $\|y\|_2 < \gamma \|u\|_2$ , s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  solution de (53) (resp. (54)) pour  $i = 1, \dots, N$ .

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + C_i^T C_i & P B_i \\ B_i^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T P A_i + C_i^T C_i - P & A_i^T P B_i \\ B_i^T P A_i & B_i^T P B_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (54)$$

Pour un réel positif  $\gamma$  donné, un observateur est dit  $\mathcal{L}_2$ , de gain  $\gamma$  si l'erreur d'estimation et les entrées inconnues vérifient  $\|e\|_2 < \gamma \|d\|_2$ .

**Theorème 2** *Il existe un observateur  $\mathcal{L}_2$  (7-8) de gain inférieur à  $\gamma$  pour le SSTS (1-2), si la condition (55) est satisfaite et s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et des matrices  $\underline{Z} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$  et  $\underline{K}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , solutions des LMI (56) pour  $i = 1, \dots, N$ .*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix} = n + \text{rang } G \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i,11} & \Psi_{i,12} \\ \Psi_{i,12}^T & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0 \quad (56)$$

où  $\Psi_{i,11}$ , et  $\Psi_{i,12}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \Psi_{i,11} = & P Y X_1^+ A_i + \underline{Z} X_1^\perp A_i + \underline{K}_i C \\ & + (P Y X_1^+ A_i + \underline{Z} X_1^\perp A_i + \underline{K}_i C)^T + I \end{aligned} \quad (57)$$

$$\Psi_{i,12} = P Y X_1^+ D_i + \underline{Z} X_1^\perp D_i - \underline{K}_i G \quad (58)$$

Où  $X_1^+ \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}$ ,  $X_2^+ \in \mathbb{R}^{(n+q) \times m}$ ,  $X_1^\perp \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$  et  $X_2^\perp \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$  sont définies par

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}^+ = [X_1^+ \quad X_2^+] \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix}^+ - I_{n+m} = [X_1^\perp \quad X_2^\perp] \quad (60)$$

**Preuve.** Si (55) est vérifiée, alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  telles que

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} X = Y \quad (61)$$

où  $X$  et  $Y$  sont données par

$$X = \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & G \end{bmatrix} \quad Y = [I_n \quad 0_{n \times m}] \quad (62)$$

Alors,  $T_1$  et  $T_2$  sont définies par (63) et (64) où  $Z$  est une matrice arbitraire.

$$T_1 = Y X_1^+ + Z X_1^\perp \quad (63)$$

$$T_2 = Y X_2^+ + Z X_2^\perp \quad (64)$$

En reprenant la preuve du théorème 1, si (26), (30) et (31) sont respectées, l'erreur d'estimation d'état  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est régie par

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_{i=1}^N h_i(w(t))((T_1 A_i + K_i C)e(t) \\ & + (T_1 D_i - K_i G)d(t)) \end{aligned} \quad (65)$$

D'après le lemme 2, on a  $\|e(t)\|_2 < \gamma \|d(t)\|_2$ , s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  solution des LMI suivantes pour  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} \Psi_i + I_n & PT_1 D_i - PK_i G \\ D_i^T T_1^T P - G^T K_i^T P & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} < 0 \quad (66)$$

où  $\Psi_i$  est donné par

$$\Psi_i = (T_1 A_i + K_i C)^T P + P(T_1 A_i + K_i C) \quad (67)$$

En posant  $\underline{K}_i = PK_i$  et  $\underline{Z} = PZ$ , on obtient (56). ■

De manière évidente, la condition (55) est moins restrictive que (11). Le terme  $\gamma^2$  peut être considéré comme une variable à minimiser lors de l'optimisation LMI, afin d'obtenir l'atténuation optimale des EI sur l'estimation.

**Corollaire 2** *Il existe un observateur  $\mathcal{L}_2$  (9-10) de gain inférieur à  $\gamma$  pour le SSTS (3-4), si la condition (55) est satisfaite et s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et des matrices  $\underline{Z} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$  et  $\underline{K}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , solutions des LMI (56) pour  $i = 1, \dots, N$ .*

$$\begin{bmatrix} I_n - P & 0 & \Phi_{i,1}^T \\ 0 & -\gamma^2 I_n & \Phi_{i,2}^T \\ \Phi_{i,1} & \Phi_{i,2} & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (68)$$

où  $\Phi_{i,1}$  et  $\Phi_{i,2}$  sont définis par

$$\Phi_{i,1} = PY X_1^+ A_i + \underline{Z} X_1^+ A_i + \underline{K}_i C \quad (69)$$

$$\Phi_{i,2} = PY X_1^+ D_i + \underline{Z} X_1^+ D_i - \underline{K}_i G \quad (70)$$

**Preuve.** La preuve est identique à celle du théorème 2, donc est omise. ■

Finalement la synthèse d'un observateur  $\mathcal{L}_2$  pour un SSTS à temps continu (resp. discret) se résume à la procédure suivante.

- Pas 1. Vérifier la condition d'existence (55).
- Pas 2. Résoudre les LMI (56) (resp. (68)) en  $P$ ,  $\underline{Z}$  et  $\underline{K}_i$ .
- Pas 3. Calculer  $Z$  et  $K_i$  par  $Z = P^{-1} \underline{Z}$  et  $K_i = P^{-1} \underline{K}_i$  respectivement. Les matrices  $T_1$  et  $T_2$  sont obtenues par (63) et (64). Les gains  $N_i$ ,  $M_i$  et  $L_i$  sont calculés par (26), (30) et (31) respectivement.

## 6 Exemple

Considérons le SSTS à temps discret (3-4), de période d'échantillonnage  $t_s = 0.03s$ , défini par

$$E = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 0])$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.888 & -0.055 & 0.0810 & 0.110 \\ -0.081 & 0.888 & 0.080 & 0.108 \\ -0.134 & -0.081 & 1.073 & 0.216 \\ 0.082 & 0.027 & -0.081 & 0.832 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.881 & -0.026 & 0.084 & 0.111 \\ -0.084 & 0.889 & 0.052 & 0.105 \\ -0.202 & -0.023 & 1.08 & 0.216 \\ 0.030 & 0.026 & -0.055 & 0.8321 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3.00 & -0.02 \\ 0.04 & 2.89 \\ 0.13 & 1.43 \\ 2.87 & -0.02 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.282 & 0.002 \\ -0.13 & 2.87 \\ -0.31 & 1.52 \\ 0.05 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0.001 & 0 \\ 0.031 & 0 \\ -0.001 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont définies par  $h_{1k} = (1 - \tanh(u_{1k}/15))/2$  et  $h_{2k} = 1 - h_{1k}$ . Les mesures sont affectées par un bruit centré d'amplitude maximale 0.05. La résolution LMI et les simulations sont faites avec Matlab. L'estimation d'état est illustrée par les figure 1-2. Les sorties  $y_k$  étant bruitées, il est nécessaire de filtrer les EI estimées. L'estimation des EI est illustrée par la figure 3.

## 7 Conclusion

Cet article détaille deux synthèses d'observateurs pour systèmes singuliers TS à entrées inconnues, à temps continu et à temps discret. Sous certaines conditions de découplage, on peut construire un observateur à entrées inconnues. L'estimation des variables d'état permet alors de reconstruire les entrées inconnues. Sous des conditions moins restrictives, on peut

construire un observateur minimisant le gain  $\mathcal{L}_2$  des entrées inconnues vers l'estimation.

À l'avenir, il sera intéressant de mettre en œuvre les observateurs proposés pour le diagnostic.

## Références

- [1] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin. State Estimation via Multiple Observer with Unknown Input. Application to the three tank System. *Proc. of the 5<sup>th</sup> IFAC SAFEPROCESS*, pp. 245-251, 2003.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM studies in applied mathematics, 1994.
- [3] M. Chilali, P. Gahinet.  $H_\infty$ -design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 41, pp. 358-367, 1996.
- [4] L. Dai. *Singular Control Systems*. Springer, Berlin, 1989.
- [5] M. Darouach, M. Zasadzinski, S.J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 39, pp. 606-609, 1994.
- [6] M. Darouach, M. Boutayeb. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 40, pp. 1323-1327, 1995.
- [7] K.Y. Lian, P. Liu, J.J. Liou, T.C. Wu. Robust Output Feedback Control for Fuzzy Descriptor Systems. *Proc of the IEEE Int. Fuzzy Syst. Conf.*, vol. 2, pp. 904-907, 2001.
- [8] T. Takagi, M. Sugeno. Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [9] K. Tanaka, T. Ikeda, H.O. Wang. Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 6, pp. 250-265, 1998.
- [10] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, H.O. Wang. Fuzzy Descriptor Systems : Stability Analysis and Design via LMIs. *Proc. of the Amer. Contr. Conf.*, vol. 3, pp. 1827-1831, 1999.
- [11] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang. Fuzzy Descriptor Systems and Nonlinear Model Following Control. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, pp. 442-452, 2000.
- [12] T. Tanaka, T. Hori, H.O. Wang. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, pp. 582-589, 2003.
- [13] H.O. Wang, K. Tanaka, M.F. Griffin. An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems : Stability and Design Issues. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, pp. 14-23, 1996.
- [14] Y. Wang, Q.L. Zhang, W.Q. Liu. Stability Analysis and Design for T-S Fuzzy Descriptor Systems. *Proc. of the IEEE Conf. Decision Contr.*, vol. 4, pp. 3962-3967, 2001
- [15] J. Yoneyama, I. Ichikawa.  $H_\infty$ -Control for Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor Systems. *Proc of the IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern.*, vol. 3, pp. 28-33, 1999.

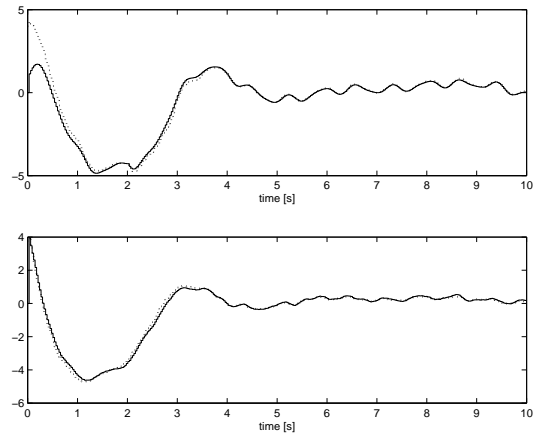


Figure 1 – Variables d'état (pointillés) et leurs estimées (continu),  $x_1$  (haut) et  $x_2$  (bas)

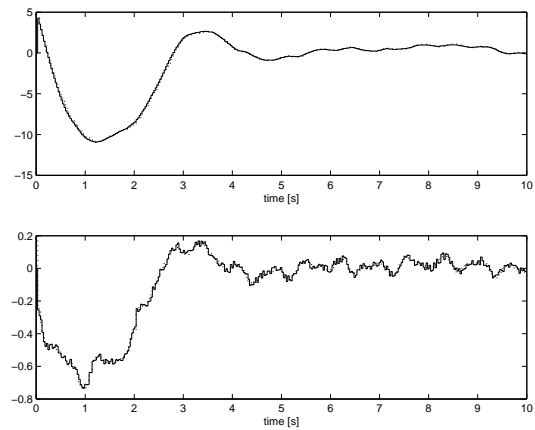


Figure 2 – Variables d'état (pointillés) et leurs estimées (continu),  $x_3$  (haut) et  $x_4$  (bas)

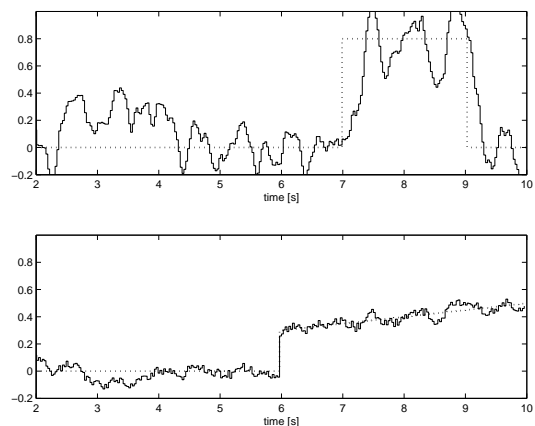


Figure 3 – Entrées inconnues (pointillés) et leurs estimées (continu),  $d_1$  (haut) et  $d_2$  (bas)