

Observateurs pour Systèmes Singuliers à Retard et Entrées Inconnues

B. Marx & D. Koenig



Laboratoire d'Automatique de Grenoble
UMR CNRS-UJF-INPG
B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

► **Introduction**

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Plan de l'exposé

- **Introduction aux systèmes singuliers**
- **Observateur à entrées inconnues (EI)**
- **Observateur H_∞**
- **Exemples**
- **Conclusion**

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Introduction aux Systèmes singuliers

Pour la modélisation de systèmes physiques on utilise des

- relations dynamiques (loi de comportement, stockage, PFD, etc.)
- relations statiques (maillage, équilibre de bilans, etc.)

On a donc un modèle du type :

$$0 = f(\dot{x}(t), x(t), u(t))$$

$$0 = g(x(t), u(t), y(t))$$

après linéarisation, le modèle devient :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec $\text{rang}(E) = r \leq n = \dim(x)$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Introduction aux Systèmes singuliers

Pour la modélisation de systèmes physiques on utilise des

- relations dynamiques (loi de comportement, stockage, PFD, etc.)
- relations statiques (maillage, équilibre de bilans, etc.)

On a donc un modèle du type :

$$0 = f(\dot{x}(t), x(t), u(t))$$

$$0 = g(x(t), u(t), y(t))$$

après linéarisation, le modèle devient :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec $\text{rang}(E) = r \leq n = \dim(x)$

on peut supposer $D=0$ sans perte de généralité

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Formes équivalentes

pour P et Q non singulières on a : $\left\{ E, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ PEQ, \begin{pmatrix} PAQ & PB \\ CQ & D \end{pmatrix} \right\}$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Formes équivalentes

pour P et Q non singulières on a : $\left\{ E, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ PEQ, \begin{pmatrix} PAQ & PB \\ CQ & D \end{pmatrix} \right\}$

Forme équivalente standard :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \\ N \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + B_2 u(t) \quad (N \text{ nilpotente}) \\ y(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \end{aligned}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Formes équivalentes

pour P et Q non singulières on a : $\left\{ E, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ PEQ, \begin{pmatrix} PAQ & PB \\ CQ & D \end{pmatrix} \right\}$

Forme équivalente standard :

sous-syst. usuel

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t)$$

sous -syst. non propre

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (N \text{ nilpotente})$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Formes équivalentes

pour P et Q non singulières on a : $\left\{ E, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ PEQ, \begin{pmatrix} PAQ & PB \\ CQ & D \end{pmatrix} \right\}$

Forme équivalente standard :

sous-syst. usuel

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t)$$

sous -syst. non propre

$$N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (N \text{ nilpotente})$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Forme équivalente par décomposition par valeurs singulières :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + A_{12} x_2(t) + B_1 u(t)$$

$$0 = A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + B_2 u(t)$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Formes équivalentes

pour P et Q non singulières on a : $\left\{ E, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\} = \left\{ PEQ, \begin{pmatrix} PAQ & PB \\ CQ & D \end{pmatrix} \right\}$

Forme équivalente standard :

sous-syst. usuel

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t)$$

sous -syst. non propre

$$N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (N \text{ nilpotente})$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Forme équivalente par décomposition par valeurs singulières :

dynamique

$$\dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + A_{12} x_2(t) + B_1 u(t)$$

statique

$$0 = A_{21} x_1(t) + A_{22} x_2(t) + B_2 u(t)$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Réponse temporelle

- Réponse temporelle

$$y(t) = C_1(e^{A_1 t} [I \ 0] Q^{-1} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau) - C_2 \sum_{k=0}^{h-1} N^k B_2 u^{(k)}(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Réponse temporelle

- Réponse temporelle

$$y(t) = C_1 \left(e^{A_1 t} [I \ 0] Q^{-1} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \right) + C_2 \sum_{k=0}^{h-1} N^k B_2 u^{(k)}(t)$$

sous-syst.
usuel

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Réponse temporelle

- Réponse temporelle

$$y(t) = C_1 \left(e^{A_1 t} [I \ 0] Q^{-1} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \right) + C_2 \sum_{k=0}^{h-1} N^k B_2 u^{(k)}(t)$$

sous-syst.
usuel

sous syst.
non propre

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Réponse temporelle

- Réponse temporelle

$$y(t) = C_1 \left(e^{A_1 t} [I \ 0] Q^{-1} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \right) + C_2 \sum_{k=0}^{h-1} N^k B_2 u^{(k)}(t)$$

sous-syst.
usuel

sous syst.
non propre

- **régularité** \Leftrightarrow unicité de la trajectoire $x(t)$ pour $u(t)$ et x_0 données
 $\Leftrightarrow \det(sE-A) \neq 0$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Réponse temporelle

- Réponse temporelle

$$y(t) = C_1 \left(e^{A_1 t} [I \ 0] Q^{-1} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \right) + C_2 \sum_{k=0}^{h-1} N^k B_2 u^{(k)}(t)$$

sous-syst.
usuel

sous syst.
non propre

- **régularité** \Leftrightarrow unicité de la trajectoire $x(t)$ pour $u(t)$ et x_0 données
 $\Leftrightarrow \det(sE-A) \neq 0$
- **système non impulsif**
 - \Leftrightarrow admet une représentation usuelle
 - \Leftrightarrow a une fonction de transfert propre
 - $\Leftrightarrow N=0$, dans la forme équivalente standard
 - $\Leftrightarrow A_{22}$ inversible dans la forme équivalente par SVD de E

► Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Intérêts des systèmes singuliers

- signification physique des variables
- combinaison de relations dynamiques **et** statiques
 - ◇ systèmes rectangulaires
 - ◇ systèmes interconnectés
 - ◇ systèmes impulsifs
- mauvais conditionnement de $E^{-1}A$, pour E inversible

► **Introduction**

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers

► **Introduction**

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers

(E, A, B)
commandable

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers

(E, A, B)
commandable



{ sous-syst. usuel
commandable

sous-syst.
non propre
commandable

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers

(E, A, B)
commandable



sous-syst. usuel
commandable ↔

sous-syst.
non propre
commandable

$\exists K$ tel que les pôles
finis de $(E, A+BK)$ soient
arbitrairement placés

Introduction

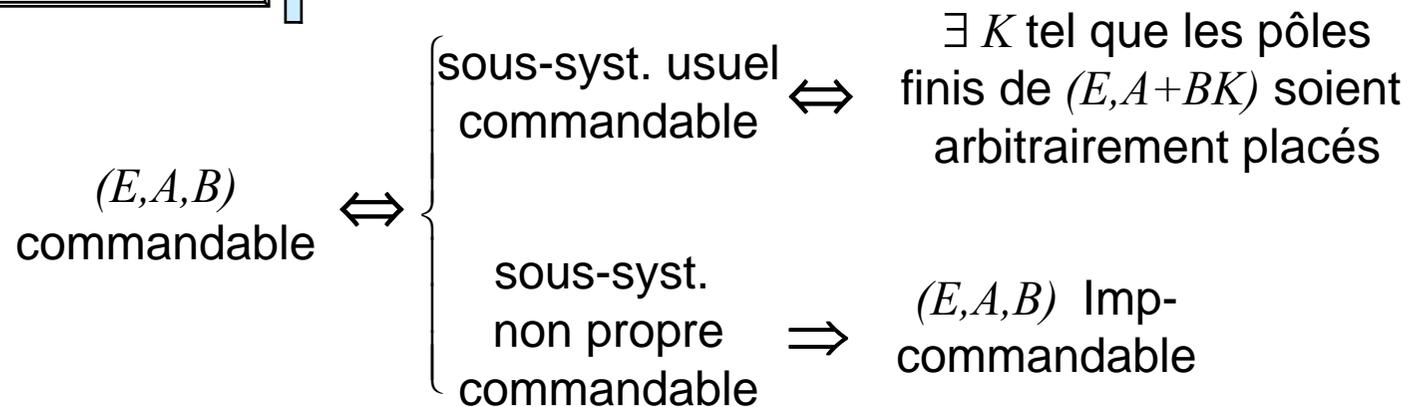
Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers



Introduction

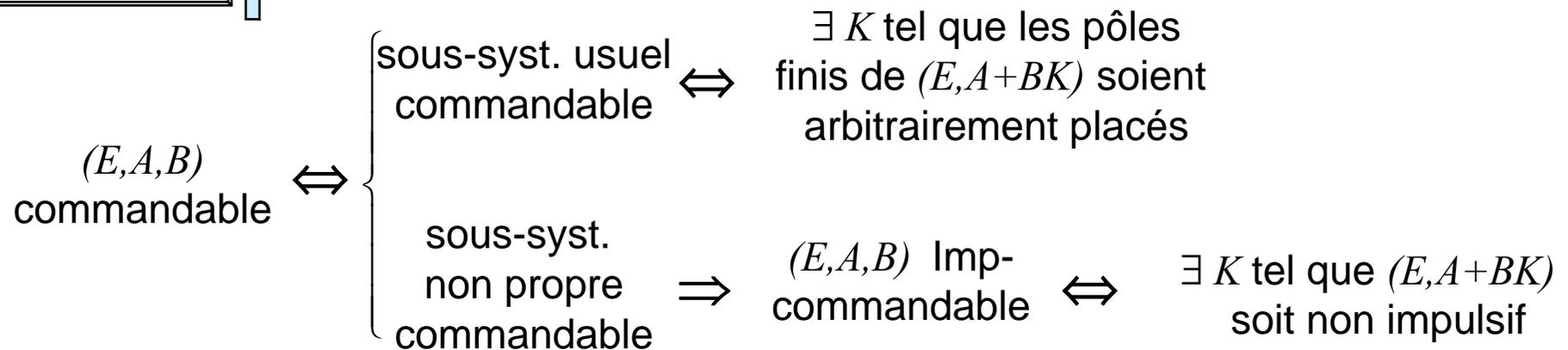
Obs EI

Obs H_∞

Exemples

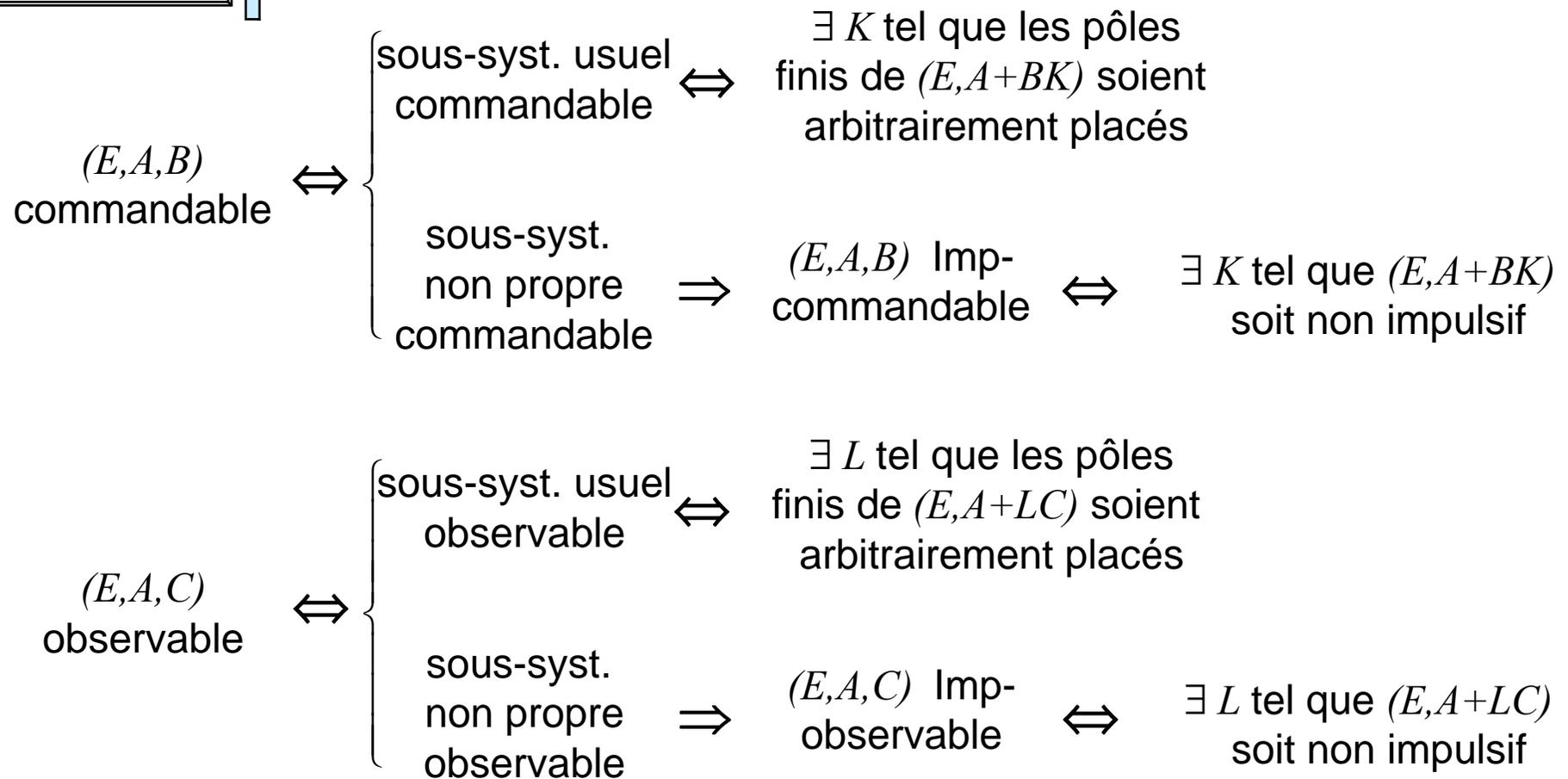
Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers



- ▶ Introduction
- Obs EI
- Obs H_∞
- Exemples
- Conclusion

Commandabilité des syst. singuliers



Introduction

Obs EI

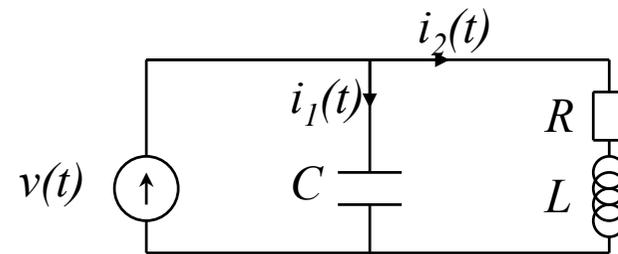
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$



Introduction

Obs EI

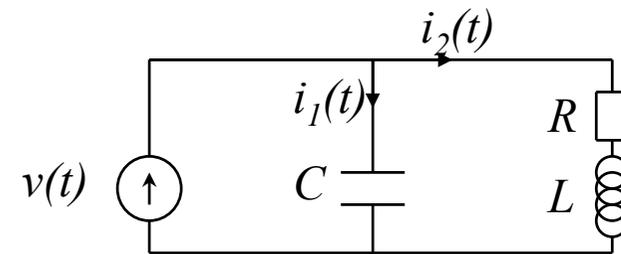
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$



décrit par la forme singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R \\ 1/C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Introduction

Obs EI

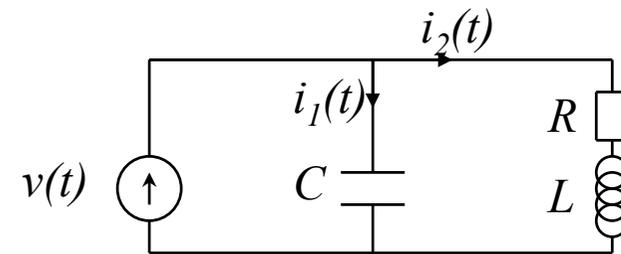
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$



décrit par la forme singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R \\ 1/C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

de fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} Cs & 1 \\ sL + R \end{bmatrix}^T$$

Introduction

Obs EI

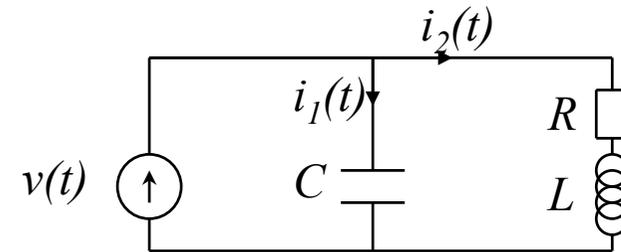
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$

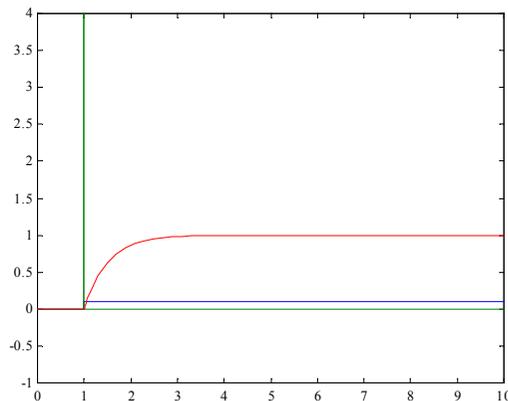


décrit par la forme singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R \\ 1/C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

de fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} Cs & 1 \\ sL + R \end{bmatrix}^T$$



(E, A, B) R-commandable
et Imp-commandable

Introduction

Obs EI

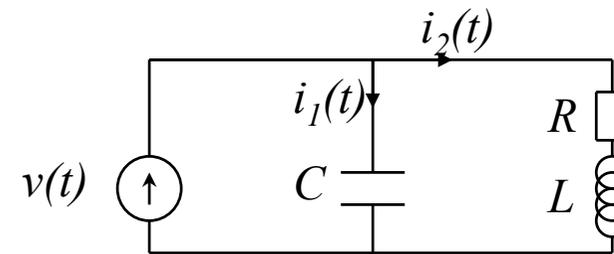
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

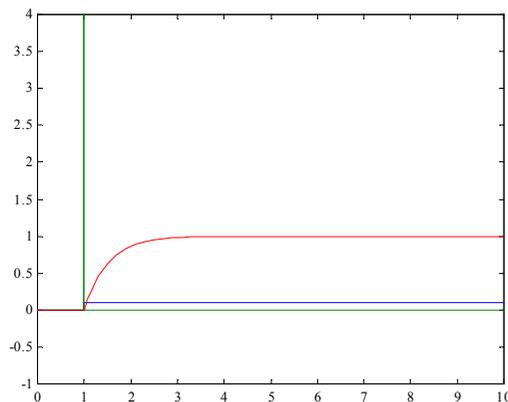
Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$



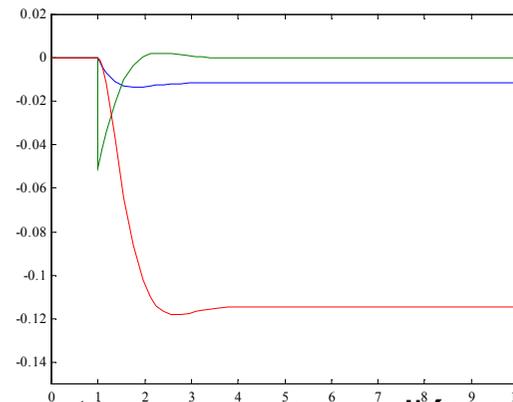
décrit par la forme singulière
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R \\ 1/C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

de fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} Cs & \frac{1}{sL+R} \end{bmatrix}^T$$



État du système



$x(t)$, avec retour d'état normalisant

(E, A, C) R-observable et Imp-observable

Introduction

Obs EI

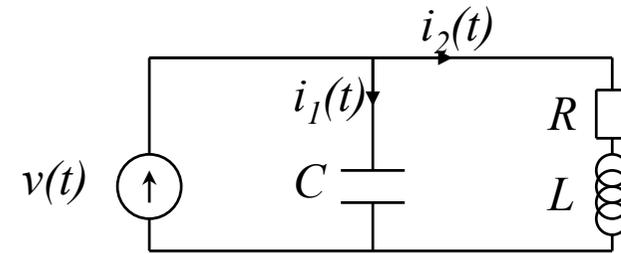
Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple

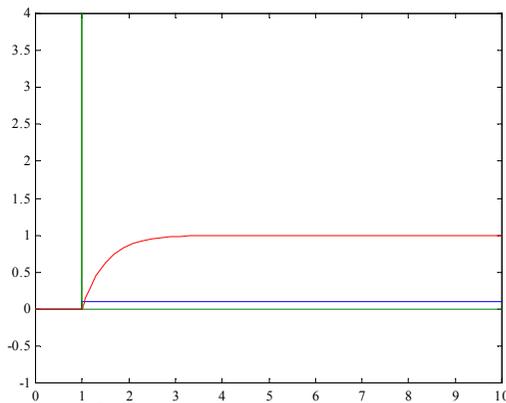
Circuit RLC parallèle :
à $t=1$, on applique $v=1 V$



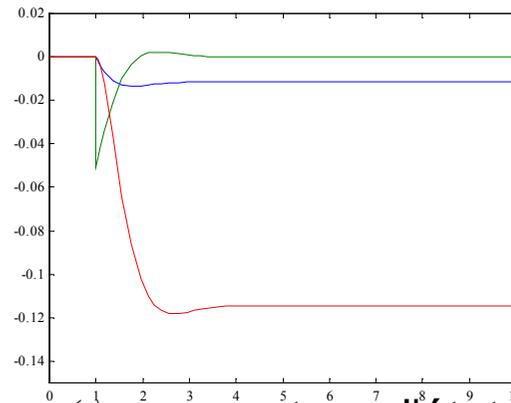
décrit par la forme singulière
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R \\ 1/C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

de fonction de transfert

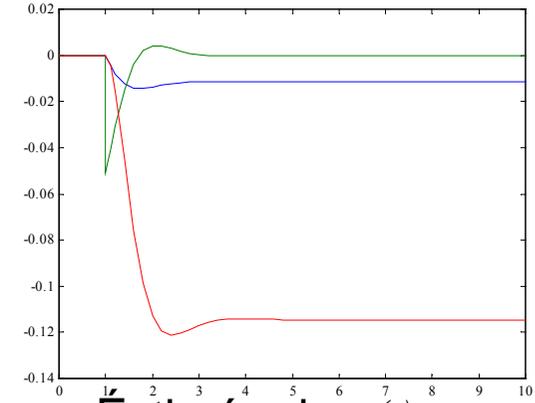
$$G(s) = \begin{bmatrix} Cs & \frac{1}{sL + R} \end{bmatrix}^T$$



État du système



$x(t)$, avec retour d'état normalisant



Estimée de $x(t)$, avec retour d'état observé

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Problématique

- **Systeme** :
$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + Ww(t)$$
$$x(t) = \Phi(t), \quad \text{pour } t \in [-h, 0]$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{R}^p, w \in \mathbf{R}^q, E \in \mathbf{R}^{m \times n} \dots$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Problématique

- **Système :**

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + Ww(t)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad \text{pour } t \in [-h, 0]$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{R}^p, w \in \mathbf{R}^q, E \in \mathbf{R}^{m \times n} \dots$$

- **Objectifs :**
 - ◇ estimer l'état malgré les entrées inconnues
 - ◆ estimation découplée des EI \Rightarrow Obs EI
 - ◆ atténuation des EI vers l'estimé \Rightarrow Obs H_∞
 - ◇ relaxer l'hypothèse usuelle de régularité de (E, A)

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Problématique

- **Système :**

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_h x(t-h) + Bu(t) + Ww(t)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad \text{pour } t \in [-h, 0]$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{R}^p, w \in \mathbf{R}^q, E \in \mathbf{R}^{m \times n} \dots$$

- **Objectifs :**
 - ◇ estimer l'état malgré les entrées inconnues
 - ◆ estimation découplée des EI \Rightarrow Obs EI
 - ◆ atténuation des EI vers l'estimé \Rightarrow Obs H_∞
 - ◇ relaxer l'hypothèse usuelle de régularité de (E, A)

- **Hypothèse :**
 - ◇ les matrices E et C vérifient $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Structure & définitions des observateurs

- Observateur :**

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + F_h z(t-h) + TBu(t) \dots$$

$$+ (G_1 + G_2)y(t) + (G_{1h} + G_{2h})y(t-h)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + Ny(t)$$

$$z \in \mathbf{R}^n \text{ et } \hat{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Structure & définitions des observateurs

- **Observateur** :
$$\dot{z}(t) = Fz(t) + F_h z(t-h) + TBu(t) \dots$$
$$+ (G_1 + G_2)y(t) + (G_{1h} + G_{2h})y(t-h)$$
$$\hat{x}(t) = z(t) + Ny(t)$$

$$z \in \mathbf{R}^n \text{ et } \hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t)$$

- **Observateur à entrées inconnues sans retard interne** :

◇ estimation découplée des EI (*i.e.* $TW=0$)

◇ pas de retard sur $z(t)$ (*i.e.* $F_h=0$)

◇ $\hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t) \forall \Phi(t), z(0), y(t), u(t), w(t)$

Introduction

Obs EI

 Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Structure & définitions des observateurs

- **Observateur** :
$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + F_h z(t-h) + TBu(t) \dots \\ &\quad + (G_1 + G_2)y(t) + (G_{1h} + G_{2h})y(t-h) \\ \hat{x}(t) &= z(t) + Ny(t) \end{aligned}$$

$$z \in \mathbf{R}^n \text{ et } \hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t)$$

- **Observateur à entrées inconnues sans retard interne** :

◇ estimation découplée des EI (*i.e.* $TW=0$)

◇ pas de retard sur $z(t)$ (*i.e.* $F_h=0$)

◇ $\hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t) \forall \Phi(t), z(0), y(t), u(t), w(t)$

- **Observateur H_∞** :

◇ majoration du transfert des EI sur l'erreur d'estimation $e(t)$:

$$\|T_{we}(s)\|_\infty < \gamma, \text{ pour } \gamma \text{ réel positif}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Convergence de l'observateur à EI sans retard

- **Convergence de l'erreur d'estimation :**

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \Rightarrow \exists (T, N), tq \begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } e(t) : \quad e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= z(t) + NCx(t) - x(t) \\ &= z(t) - TEx(t) \end{aligned}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Convergence de l'observateur à EI sans retard

- **Convergence de l'erreur d'estimation :**

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \Rightarrow \exists (T, N), tq \begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } e(t) : \quad e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= z(t) + NCx(t) - x(t) \\ &= z(t) - TEx(t) \end{aligned}$$

Convergence de $e(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - TE\dot{x}(t) \\ &= Fe(t) + F_h e(t-h) + (F - TA + G_2C + (G_1 - FN)C)x(t) \\ &\quad + (F_h - TA_h + G_{2h}C + (G_{1h} - F_hN)C)x(t-h) - TWw(t) \end{aligned}$$

Introduction

Obs EI

 Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Convergence de l'observateur à EI sans retard

- **Convergence de l'erreur d'estimation :**

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \Rightarrow \exists (T, N), tq \begin{bmatrix} T & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } e(t) : \quad e(t) &= \hat{x}(t) - x(t) \\ &= z(t) + NCx(t) - x(t) \\ &= z(t) - TEx(t) \end{aligned}$$

Convergence de $e(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - TE\dot{x}(t) \\ &= Fe(t) + F_h e(t-h) + (F - TA + G_2C + (G_1 - FN)C)x(t) \\ &\quad + (F_h - TA_h + G_{2h}C + (G_{1h} - F_hN)C)x(t-h) - TWw(t) \end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \Leftrightarrow \begin{cases} F = TA - G_2C \\ G_1 = FN \\ F_h = TA_h - G_{2h}C = 0 \\ G_{1h} = F_hN = 0 \\ TW = 0 \end{cases}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. à EI sans retard

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. à EI sans retard

- **Condition d'existence de l'observateur EI :**

◇ $e(t)$ indépendante des CI, $x(t)$, $x(t-h)$, $w(t)$ ssi

$$\begin{bmatrix} T & N & -G_{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

a une solution en T, N, G_{2h}

◇ F est stable $\Leftrightarrow (TA, C)$ est détectable (2)

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. à EI sans retard

- Condition d'existence de l'observateur EI :

◇ $e(t)$ indépendante des CI, $x(t)$, $x(t-h)$, $w(t)$ ssi

$$\begin{bmatrix} T & N & -G_{2h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = [I_n \ 0 \ 0] \quad (1)$$

a une solution en T, N, G_{2h}

◇ F est stable $\Leftrightarrow (TA, C)$ est détectable (2)

- **Théorème.** L'observateur à EI sans retard existe si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} = 2n + q \quad (\Leftrightarrow 1)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A & W & A_h \\ sC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2n + q, \quad \forall s, \text{Re}(s) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow 2)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. à EI sans retard

- Algorithme de synthèse de l'observateur EI :

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. à EI sans retard

- **Algorithme de synthèse de l'observateur EI :**

1. Déterminer $T N$ et G_{2h} par $[T N - G_{2h}] = [I_n \ 0 \ 0] \Psi^+$ avec

$$\Psi^+ = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \text{ et } \Psi = \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. à EI sans retard

- **Algorithme de synthèse de l'observateur EI :**

1. Déterminer TN et G_{2h} par $[TN - G_{2h}] = [In \ 0 \ 0]\Psi^+$ avec

$$\Psi^+ = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \text{ et } \Psi = \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

2. Déterminer G_2 par placement de pôles de $F = TA - G_2C$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. à EI sans retard

- **Algorithme de synthèse de l'observateur EI :**

1. Déterminer TN et G_{2h} par $[TN - G_{2h}] = [In \ 0 \ 0]\Psi^+$ avec

$$\Psi^+ = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \text{ et } \Psi = \begin{bmatrix} E & W & A_h \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

2. Déterminer G_2 par placement de pôles de $F = TA - G_2C$

3. Fixer $G_1 = FN$, $F_h = 0$, $G_{h1} = 0$ et implémenter l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + TBu(t) + (G_1 + G_2)y(t) + G_{2h}y(t-h) \\ \hat{x}(t) &= z(t) + Ny(t) \end{aligned}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Observateur H_∞

- **Objectifs :**

- ◇ relaxer l'hypothèse de découplage estimation / EI
- ◇ assurer la convergence de l'estimation vers l'état
- ◇ assurer la minimisation de la norme- H_∞ du transfert des EI sur l'estimation de l'état

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Observateur H_∞

- **Objectifs :**

- ◇ relaxer l'hypothèse de découplage estimation / EI
- ◇ assurer la convergence de l'estimation vers l'état
- ◇ assurer la minimisation de la norme- H_∞ du transfert des EI sur l'estimation de l'état

- **Méthode :**

- ◇ fonction de Lyapunov-Krasovskii
- ◇ gains déterminés par optimisation sous contraintes LMI

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. H_∞

- Erreur d'estimation :

pour : $F = TA - G_2 C$ $G_1 = FN$

$$F_h = TA_h - G_{2h} C \quad G_{1h} = F_h N$$

l'erreur d'estimation vérifie :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + F_h e(t-h) - TWw(t)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. H_∞

- Erreur d'estimation :

$$\text{pour : } F = TA - G_2 C \quad G_1 = FN$$

$$F_h = TA_h - G_{2h} C \quad G_{1h} = F_h N$$

l'erreur d'estimation vérifie :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + F_h e(t-h) - TWw(t)$$

- Majoration de la sensibilité de l'estimation aux EI :

soit $V(e,t)$ une fonction de Lyapunov-Krasovskii :

$$V(e,t) = e^T(t)Pe(t) + \int_{t-h}^t e^T(\tau)Se(\tau)d\tau, \quad P > 0, \quad S > 0$$

$\|Tew(s)\|_\infty < \gamma$ s'il existe $P=P^T > 0$ et $S=S^T > 0$ vérifiant :

$$\dot{V}(e,t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. H_∞

- **Théorème.** L'observateur H_∞ , tel que $\|Tew(s)\|_\infty < \gamma$ existe si et seulement si il existe $P=P^T > 0$ et $S=S^T > 0$ vérifiant la LMI

$$\begin{pmatrix} A^T T^T P + P T A - C^T \underline{G}^T - \underline{G} C + I + S & P T A_h - \underline{G}_h C & -P T W \\ A_h^T T^T P - C^T \underline{G}_h^T & -S & 0 \\ -W^T T^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (3)$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Condition d'existence de l'obs. H_∞

- **Théorème.** L'observateur H_∞ , tel que $\|Tew(s)\|_\infty < \gamma$ existe si et seulement si il existe $P=P^T > 0$ et $S=S^T > 0$ vérifiant la LMI

$$\begin{pmatrix} A^T T^T P + PTA - C^T \underline{G}^T - \underline{G}C + I + S & PTA_h - \underline{G}_h C & -PTW \\ A_h^T T^T P - C^T \underline{G}_h^T & -S & 0 \\ -W^T T^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (3)$$

- **Preuve :**

$$\dot{V}(e,t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e(t) \\ e(t-h) \\ w(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F^T P + PF + I + S & PF_h & -PTW \\ F_h^T P & -S & 0 \\ -W^T T^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ e(t-h) \\ w(t) \end{pmatrix} < 0, \text{ pour } \begin{cases} V(e,t) = e^T(t)Pe(t) + \int_{t-h}^t e^T(\tau)Se(\tau)d\tau \\ \dot{e}(t) = Fe(t) + F_h e(t-h) - TWw(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (3), \text{ pour } \begin{cases} F = TA - G_2 C \\ F_h = TA_h - G_{2h} C \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \underline{G} = PG_2 \\ \underline{G}_h = PG_{2h} \end{cases}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. H_∞

- Algorithme de synthèse de l'observateur H_∞ .

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. H_∞

- **Algorithme de synthèse de l'observateur H_∞ .**
 1. Déterminer γ , P , S , \underline{G} et \underline{G}_h en minimisant γ sous la contrainte LMI (3)

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. H_∞

- **Algorithme de synthèse de l'observateur H_∞ .**
 1. Déterminer γ , P , S , \underline{G} et \underline{G}_h en minimisant γ sous la contrainte LMI (3)
 2. Fixer les gains par :

$$G_2 = P^{-1} \underline{G}$$

$$F = TA - G_2 C$$

$$G_1 = FN$$

$$G_{2h} = P^{-1} \underline{G}_h$$

$$F_h = TA_h - G_{2h} C$$

$$G_{1h} = F_h N$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Synthèse de l'obs. H_∞

- **Algorithme de synthèse de l'observateur H_∞ .**

1. Déterminer γ , P , S , \underline{G} et \underline{G}_h en minimisant γ sous la contrainte LMI (3)

2. Fixer les gains par :

$$\begin{array}{lll} G_2 = P^{-1} \underline{G} & F = TA - G_2 C & G_1 = FN \\ G_{2h} = P^{-1} \underline{G}_h & F_h = TA_h - G_{2h} C & G_{1h} = F_h N \end{array}$$

3. Implémenter l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + F_h z(t-h) + TBu(t) + (G_1 + G_2)y(t) + (G_{1h} + G_{2h})y(t-h) \\ \hat{x}(t) &= z(t) + Ny(t) \end{aligned}$$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs EI sans retard

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs EI sans retard

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

la condition de découplage est vérifiée

⇒ Obs EI, on obtient :

- état réel : rouge
- état estimé : bleu

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs EI sans retard

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w(t)$$

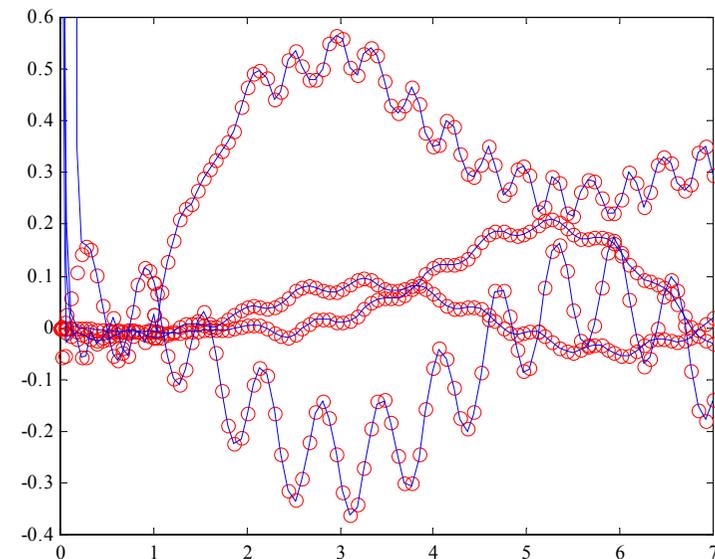
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

la condition de découplage est vérifiée

⇒ Obs EI, on obtient :

- état réel : rouge
- état estimé : bleu



Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs. H_∞

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs. H_∞

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

la condition de découplage n'est pas vérifiée

⇒ Obs H_∞ , on obtient :

- état réel : rouge
- état estimé : bleu

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Exemple d'obs. H_∞

On considère le système défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w(t)$$

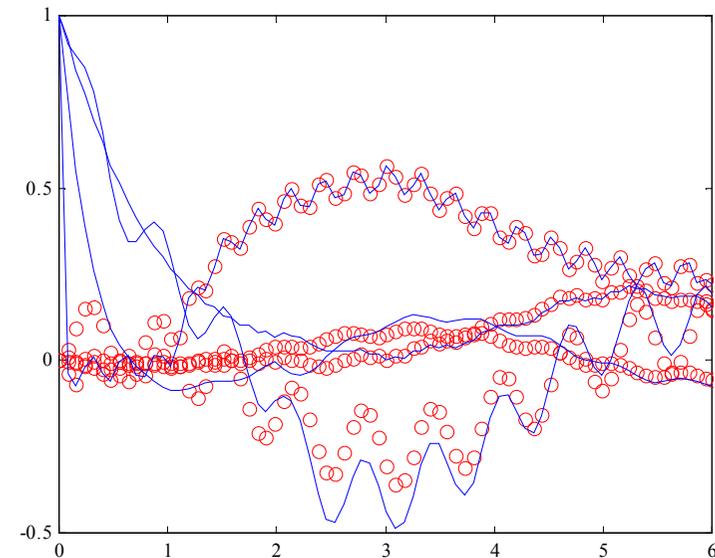
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

avec $h=2$

la condition de découplage n'est pas vérifiée

⇒ Obs H_∞ , on obtient :

- état réel : rouge
- état estimé : bleu



Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Conclusion

méthode simple de synthèse d'observateurs
pour systèmes singuliers à retard et EI

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Conclusion

méthode simple de synthèse d'observateurs
pour systèmes singuliers à retard et EI



2 cas à distinguer :

découplage possible \Rightarrow Obs. EI sans retard

découplage impossible \Rightarrow atténuation par Obs H_∞

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Conclusion

méthode simple de synthèse d'observateurs
pour systèmes singuliers à retard et EI



2 cas à distinguer :

découplage possible \Rightarrow Obs. EI sans retard

découplage impossible \Rightarrow atténuation par Obs H_∞



Solution par placement de pôles ou LMI

(boîtes à outils Matlab ou Scilab)

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Conclusion

méthode simple de synthèse d'observateurs
pour systèmes singuliers à retard et EI



2 cas à distinguer :

découplage possible \Rightarrow Obs. EI sans retard

découplage impossible \Rightarrow atténuation par Obs H_∞



Solution par placement de pôles ou LMI

(boîtes à outils Matlab ou Scilab)



Implémentation simple (filtres propres)

Introduction

Obs EI

Obs H_∞

Exemples

Conclusion

Conclusion

méthode simple de synthèse d'observateurs
pour systèmes singuliers à retard et EI



2 cas à distinguer :

découplage possible \Rightarrow Obs. EI sans retard

découplage impossible \Rightarrow atténuation par Obs H_∞



Solution par placement de pôles ou LMI

(boîtes à outils Matlab ou Scilab)



Implémentation simple (filtres propres)

À paraître dans les Proceedings d'ACC 2004 :

D. Koenig et B. Marx, Design of Observers for Descriptor Systems with Delayed State and Unknown Inputs