

Traitement du signal

Analyse de Fourier en temps discret

El-Hadi Djermoune

26 janvier 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L3 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Table des matières

Transformée de Fourier en temps discret

Définition

Exemple

Série de Fourier discrète

Définition

Exemples : sinus, rectangle

Lien avec la TFtd

Transformée de Fourier discrète

Vers la TFD

Définition

Exemple : rectangle

Paramètres de la TFD et utilisation de la `fft`

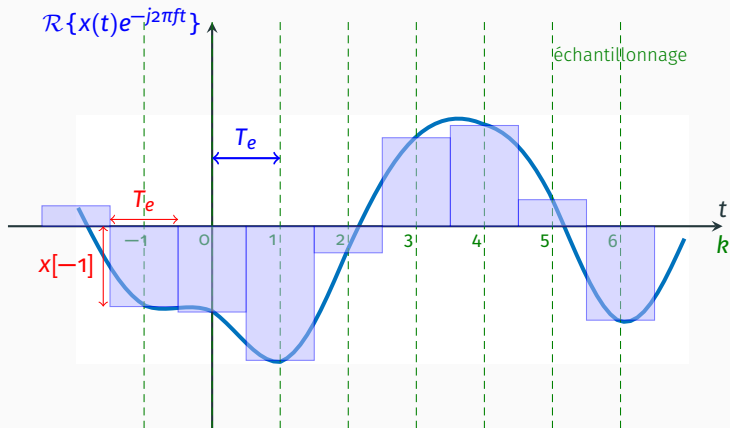
Comparaison TF - TFD

Transformée de Fourier à temps discret TFtd

Application de la transformée de Fourier à un signal échantillonné

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$



Application de la transformée de Fourier à un signal échantillonné

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- $X(f)$ est une fonction continue de la fréquence

Application de la transformée de Fourier à un signal échantillonné

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- $X(f)$ est une fonction continue de la fréquence
- $X(f)$ est périodique de période f_e (ce qui n'est pas le cas pour la TF d'un signal à temps continu)

Transformée de Fourier à temps discret TFtd

Application de la transformée de Fourier à un signal échantillonné

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- $X(f)$ est une fonction continue de la fréquence
- $X(f)$ est périodique de période f_e (ce qui n'est pas le cas pour la TF d'un signal à temps continu)

$$\begin{aligned} X(f + nf_e) &= T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi(f + nf_e)kT_e} \\ &= T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} e^{-j2\pi n k} \\ &= T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} = X(f) \end{aligned}$$

Transformée de Fourier à temps discret TFtd

Application de la transformée de Fourier à un signal échantillonné

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- $X(f)$ est une fonction continue de la fréquence
- $X(f)$ est périodique de période f_e (ce qui n'est pas le cas pour la TF d'un signal à temps continu)

TFtd inverse

La transformée inverse s'obtient à partir d'une période (de durée f_e) de la TFtd, par exemple $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$

$$x(kT_e) = \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} X(f) e^{j2\pi f k T_e} df$$

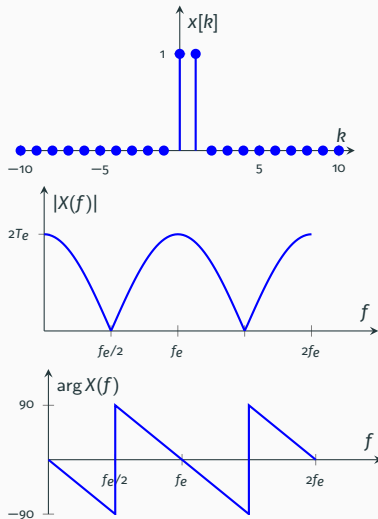
Exemple : calcul de la TFtd d'un rectangle échantillonné

$$x[k] = \text{rect}_2[k] \iff x(kT_e) = \text{rect}_2(kT_e)$$

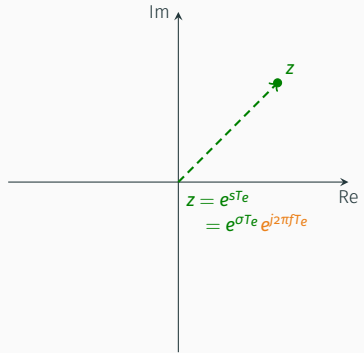
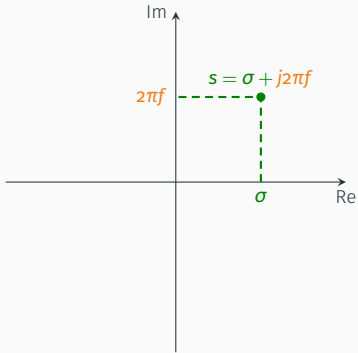
$$\begin{aligned} X(f) &= T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} \\ &= T_e (e^0 + e^{-j2\pi f T_e}) \\ &= T_e (e^{j\pi f T_e} e^{-j\pi f T_e} + e^{-j\pi f T_e} e^{-j\pi f T_e}) \\ &= T_e e^{-j\pi f T_e} (e^{j\pi f T_e} + e^{-j\pi f T_e}) \\ &= 2T_e e^{-j\pi f T_e} \cos(\pi f T_e) \end{aligned}$$

$$|X(f)| = 2T_e |\cos(\pi f T_e)|$$

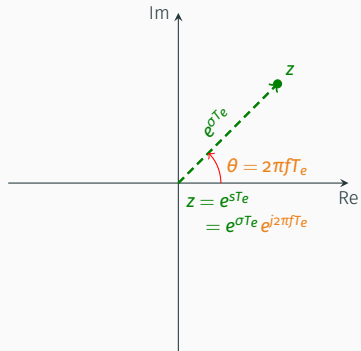
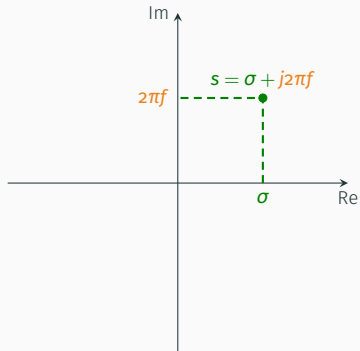
$$\angle X(f) = -\pi f T_e \quad [\pi]$$



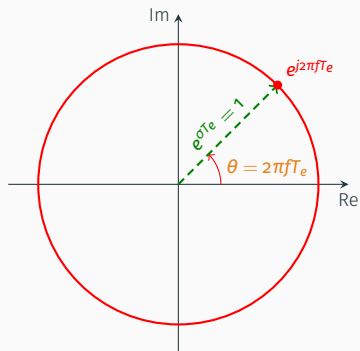
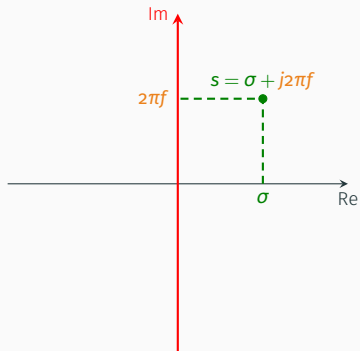
Liens entre transformations : TL et TF vs Tz et TFtd



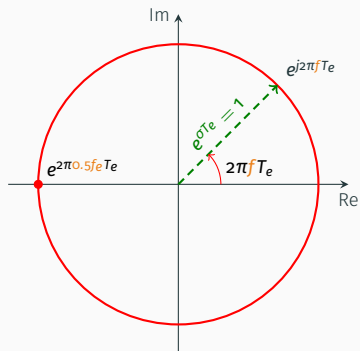
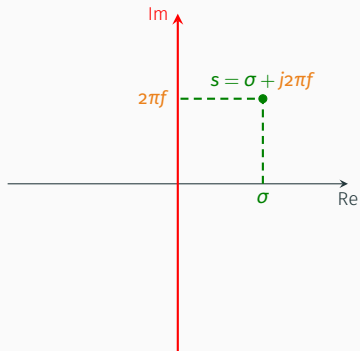
Liens entre transformations : TL et TF vs Tz et TFtd



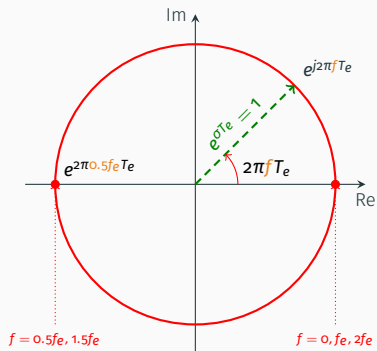
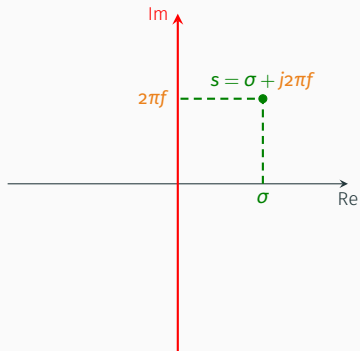
Liens entre transformations : TL et TF vs Tz et TFtd



Liens entre transformations : TL et TF vs Tz et TFtd



Liens entre transformations : TL et TF vs Tz et TFtd



Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

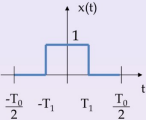
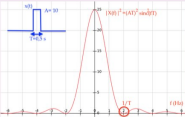
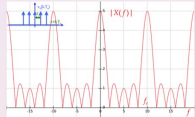
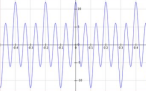
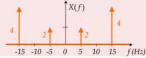
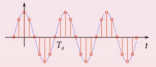
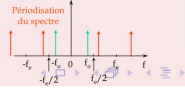
		Temps continu	Temps discret
Séries		 	$x_b[k]$ $X_b[n]$
Transformées	Spectre continu		
	Spectre de raies	 	 

Table des matières

Transformée de Fourier en temps discret

Définition

Exemple

Série de Fourier discrète

Définition

Exemples : sinus, rectangle

Lien avec la TFtd

Transformée de Fourier discrète

Vers la TFD

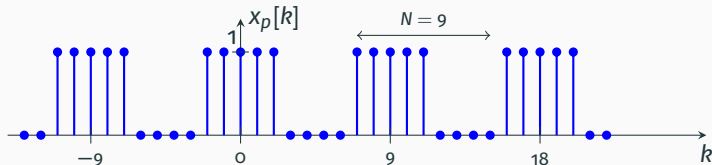
Définition

Exemple : rectangle

Paramètres de la TFD et utilisation de la `fft`

Comparaison TF - TFD

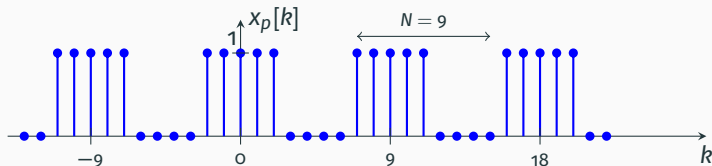
Série de Fourier discrète (SFD) : synthèse



- Soit un signal à temps discret périodique $x_p[k]$ de période N (ce qui correspond à une période de $T = 1/f_0 = NT_e$ exprimée en secondes)

$$x_p[k] = x_p[k + rN], \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad k, r \in \mathbb{Z}$$

Série de Fourier discrète (SFD) : synthèse



- Soit un signal à temps discret périodique $x_p[k]$ de période N (ce qui correspond à une période de $T = 1/f_0 = NT_e$ exprimée en secondes)

$$x_p[k] = x_p[k + rN], \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad k, r \in \mathbb{Z}$$

- En tant que signal périodique il admet la décomposition en série de Fourier suivante

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi n f_0 t}, & x_p(kT_e) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi n f_0 kT_e} \\ & & &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi n \frac{1}{NT_e} kT_e} \\ & & &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \end{aligned} \quad (1)$$

Série de Fourier discrète (SFD) : synthèse

- Soit un signal à temps discret périodique $x_p[k]$ de période N (ce qui correspond à une période de $T = 1/f_0 = NT_e$ exprimée en secondes)

$$x_p[k] = x_p[k + rN], \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad k, r \in \mathbb{Z}$$

- En tant que signal périodique il admet la décomposition en série de Fourier suivante

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi n f_0 t}, \quad x_p(kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_p[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (1)$$

- Les exponentielles complexes qui apparaissent en (1) sont identiques pour toutes les valeurs de n séparées de N :

$$e^{j2\pi(n+rN)\frac{k}{N}} = e^{j2\pi n\frac{k}{N}} e^{j2\pi rk} = e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$$

Série de Fourier discrète (SFD) : synthèse

- Soit un signal à temps discret périodique $x_p[k]$ de période N (ce qui correspond à une période de $T = 1/f_0 = NT_e$ exprimée en secondes)

$$x_p[k] = x_p[k + rN], \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad k, r \in \mathbb{Z}$$

- En tant que signal périodique il admet la décomposition en série de Fourier suivante

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p[n] e^{j2\pi n f_0 t}, \quad x_p(kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (1)$$

- Les exponentielles complexes qui apparaissent en (1) sont identiques pour toutes les valeurs de n séparées de N :

$$e^{j2\pi(n+rN)\frac{k}{N}} = e^{j2\pi n\frac{k}{N}} e^{j2\pi rk} = e^{j2\pi n\frac{k}{N}}$$

- La décomposition ne nécessite donc que N harmoniques contrairement au signal continu qui en nécessite une infinité

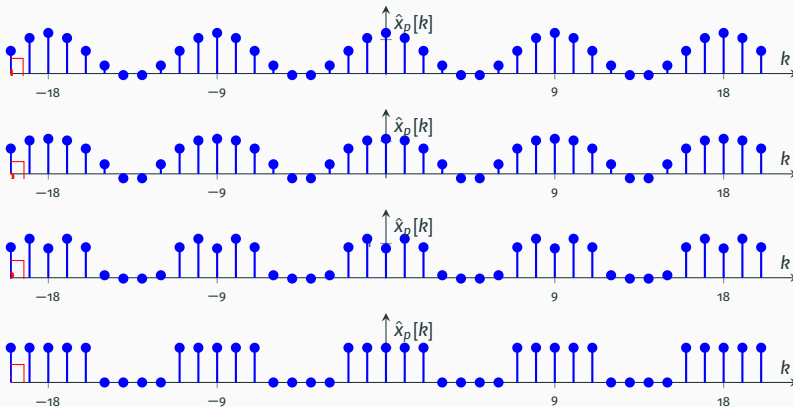
$$x_p[k] = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} X_p[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

La pondération par $1/NT_e$ est introduite pour rester homogène avec le calcul par **fft** (sera vue plus tard). Il faut alors également corriger les coefficients $X_p[n]$ en les **multipliant** par NT_e .

Série de Fourier discrète (SFD) : synthèse

- Pour le signal rectangulaire discret précédent, on trouve
 $X_p[0] = 5$, $X_p[\pm 1] \approx 2.88$, $X_p[\pm 2] \approx -0.53$, $X_p[\pm 3] = -1$, $X_p[\pm 4] \approx 0.65$.
- Reconstruction avec différentes valeurs de M :

$$\hat{x}_p[k] = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-M}^M X_p[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$



Série de Fourier discrète (SFD) : analyse

- Coefficients de Fourier

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad X_p[n] = N T_e \frac{1}{N T_e} T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k T_e) e^{-j2\pi n \frac{k T_e}{N T_e}}$$

$X_p[n] = X_p[n + N]$: la suite des coefficients est périodique de période N .

Série de Fourier discrète (SFD) : analyse

- Coefficients de Fourier

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad X_p[n] = NT_e \frac{1}{NT_e} T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{kT_e}{NT_e}}$$

$X_p[n] = X_p[n + N]$: la suite des coefficients est périodique de période N .

- Sachant que $x_p[k]$ est reconstitué exactement avec seulement N harmoniques, deux représentations spectrales sont possibles :
 1. seulement une période de N coefficients : par exemple de $X_p[0]$ à $X_p[N-1]$
 2. plusieurs périodes

Série de Fourier discrète (SFD) : analyse

- Coefficients de Fourier

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad X_p[n] = NT_e \frac{1}{NT_e} T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{kT_e}{NT_e}}$$

$X_p[n] = X_p[n + N]$: la suite des coefficients est périodique de période N .

- Sachant que $x_p[k]$ est reconstitué exactement avec seulement N harmoniques, deux représentations spectrales sont possibles :
 1. seulement une période de N coefficients : par exemple de $X_p[0]$ à $X_p[N-1]$
 2. plusieurs périodes
- Notation :

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Série de Fourier discrète (SFD) : analyse

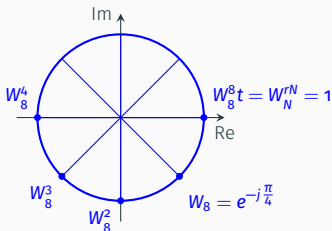
- Coefficients de Fourier

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad X_p[n] = NT_e \frac{1}{NT_e} T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{kT_e}{NT_e}}$$

$X_p[n] = X_p[n + N]$: la suite des coefficients est périodique de période N .

- Sachant que $x_p[k]$ est reconstitué exactement avec seulement N harmoniques, deux représentations spectrales sont possibles :
 1. seulement une période de N coefficients : par exemple de $X_p[0]$ à $X_p[N-1]$
 2. plusieurs périodes
- Notation :

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



Série de Fourier discrète (SFD) : analyse

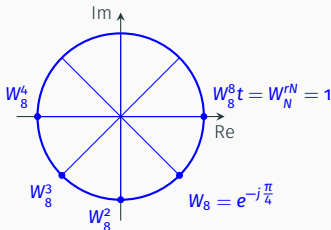
- Coefficients de Fourier

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad X_p[n] = NT_e \frac{1}{NT_e} T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p(kT_e) e^{-j2\pi n \frac{kT_e}{NT_e}}$$

$X_p[n] = X_p[n + N]$: la suite des coefficients est périodique de période N .

- Sachant que $x_p[k]$ est reconstitué exactement avec seulement N harmoniques, deux représentations spectrales sont possibles :
 1. seulement une période de N coefficients : par exemple de $X_p[0]$ à $X_p[N-1]$
 2. plusieurs périodes
- Notation :

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$



$$X_p[n] = T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] W_N^{nk}$$

$$x_p[k] = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} X_p[n] W_N^{-nk}$$

Exemple 1 : série de Fourier discrète d'un sinus

$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \sin\left(2\pi\frac{1}{NT_e}kT_e\right) \\&= \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\end{aligned}$$

$$f_0 = 2 \text{ Hz} \quad f_e = 10 \text{ Hz}$$

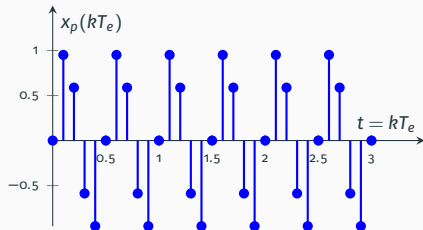
$$T_e = 0.1 \text{ s} \quad N = 5 \quad NT_e = 0.5 \text{ s}$$

Exemple 1 : série de Fourier discrète d'un sinus

$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \sin\left(2\pi \frac{1}{NT_e} kT_e\right) \\&= \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right)\end{aligned}$$

$$f_0 = 2 \text{ Hz} \quad f_e = 10 \text{ Hz}$$

$$T_e = 0.1 \text{ s} \quad N = 5 \quad NT_e = 0.5 \text{ s}$$



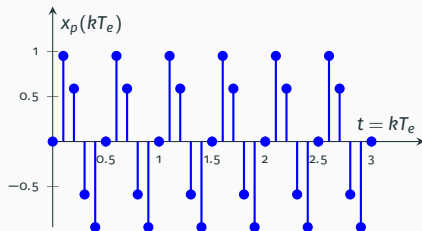
Exemple 1 : série de Fourier discrète d'un sinus

$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \sin\left(2\pi \frac{1}{NT_e} kT_e\right) \\&= \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right)\end{aligned}$$

$$f_0 = 2 \text{ Hz} \quad f_e = 10 \text{ Hz}$$

$$T_e = 0.1 \text{ s} \quad N = 5 \quad NT_e = 0.5 \text{ s}$$

$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}k} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\&= \frac{1}{0.5} \left[\frac{0.5}{2j} W_5^{-k} - \frac{0.5}{2j} W_5^k \right]\end{aligned}$$



Exemple 1 : série de Fourier discrète d'un sinus

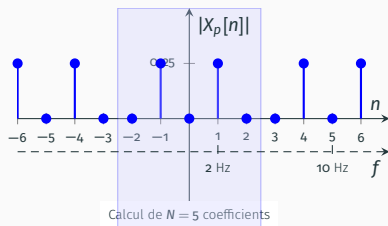
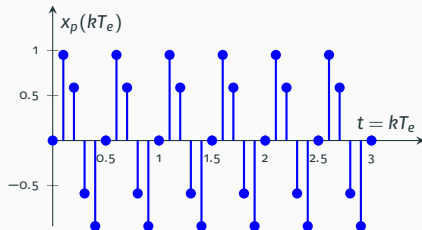
$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \sin\left(2\pi \frac{1}{NT_e} kT_e\right) \\&= \sin\left(\frac{2\pi}{N} k\right)\end{aligned}$$

$$f_0 = 2 \text{ Hz} \quad f_e = 10 \text{ Hz}$$

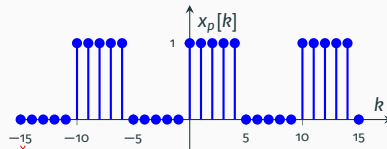
$$T_e = 0.1 \text{ s} \quad N = 5 \quad NT_e = 0.5 \text{ s}$$

$$\begin{aligned}x_p(kT_e) &= \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}k} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \\&= \frac{1}{0.5} \left[\frac{0.5}{2j} W_5^{-k} - \frac{0.5}{2j} W_5^k \right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_p[1] = X_p[6] = \dots = \frac{0.5}{2j} \\ X_p[-1] = X_p[4] = \dots = -\frac{0.5}{2j} \\ X_p[0] = X_p[2] = X_p[3] = 0 \end{cases}$$



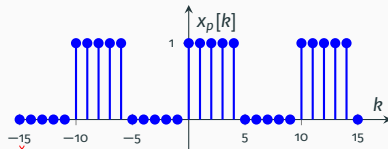
Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré



Signal carré de période N et de rapport cyclique M/N ($N = 10$, $M = 5$)

Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré

$$\begin{aligned} X_p[n] &= T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] W_N^{nk} \\ &= T_e \sum_{k=0}^{M-1} W_N^{nk} = T_e \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$



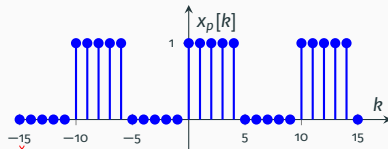
Signal carré de période N et de rapport cyclique M/N ($N = 10$, $M = 5$)

- Rappel de la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{M-1} r^k = \begin{cases} M & \text{pour } r = 1 \\ \frac{1-r^M}{1-r} & \text{pour } r \neq 1 \end{cases}$$

Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré

$$\begin{aligned}
 X_p[n] &= T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] W_N^{nk} \\
 &= T_e \sum_{k=0}^{M-1} W_N^{nk} = T_e \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}
 \end{aligned}$$



Signal carré de période N et de rapport cyclique M/N ($N = 10$, $M = 5$)

- Rappel de la série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{M-1} r^k = \begin{cases} M & \text{pour } r = 1 \\ \frac{1-r^M}{1-r} & \text{pour } r \neq 1 \end{cases}$$

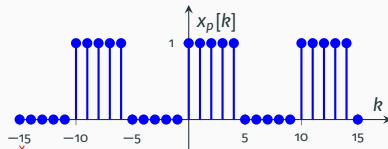
- Pour n multiple de N :

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = 1 \text{ pour } n = \dots, -N, 0, N, \dots$$

$$\Rightarrow X_p[0] = X_p[N] = \dots = MT_e$$

Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré

$$\begin{aligned}
 X_p[n] &= T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] W_N^{nk} \\
 &= T_e \sum_{k=0}^{M-1} W_N^{nk} = T_e \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}
 \end{aligned}$$



Signal carré de période N et de rapport cyclique M/N ($N = 10$, $M = 5$)

- Pour les autres valeurs de n :

$$\begin{aligned}
 X_p[n] &= T_e \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}nM}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \\
 &= T_e \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}nM} (e^{j\frac{\pi}{N}nM} - e^{-j\frac{\pi}{N}nM})}{e^{-j\frac{\pi}{N}n} (e^{j\frac{\pi}{N}n} - e^{-j\frac{\pi}{N}n})} \\
 &= T_e \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}nM} \sin(\pi nM/N)}{e^{-j\frac{\pi}{N}n} \sin(\pi n/N)} \\
 &= T_e e^{j\frac{\pi}{N}n(M-1)} \frac{\sin(\pi nM/N)}{\sin(\pi n/N)}
 \end{aligned}$$

- Rappel de la série géométrique :

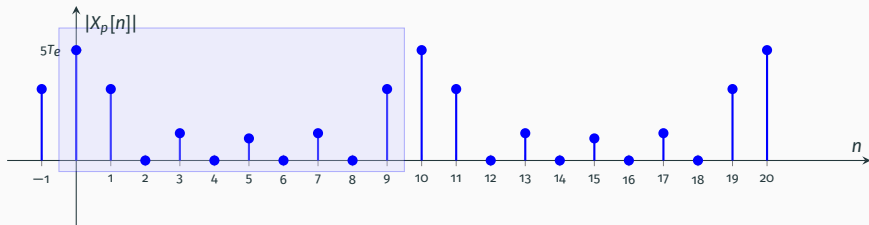
$$\sum_{k=0}^{M-1} r^k = \begin{cases} M & \text{pour } r = 1 \\ \frac{1-r^M}{1-r} & \text{pour } r \neq 1 \end{cases}$$

- Pour n multiple de N :

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = 1 \text{ pour } n = \dots, -N, 0, N, \dots$$

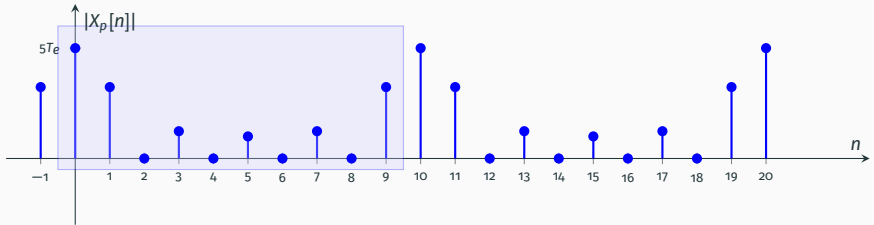
$$\Rightarrow X_p[0] = X_p[N] = \dots = MT_e$$

Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré - commentaires



Représentation spectrale

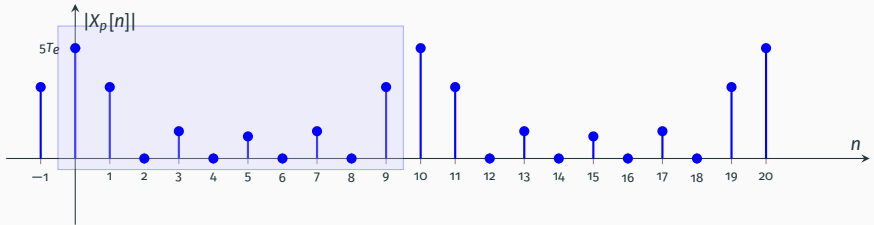
Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré - commentaires



Représentation spectrale

- rappel : enveloppe de la série de Fourier du signal carré en temps continu = sinc

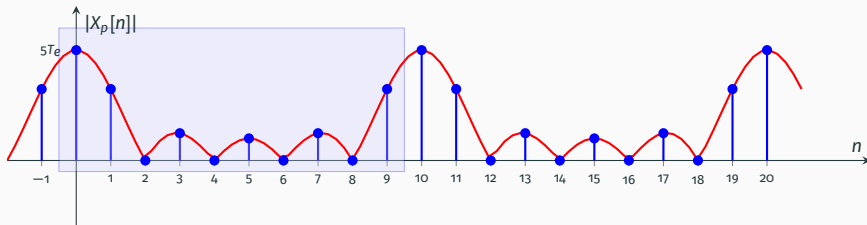
Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré - commentaires



Représentation spectrale

- rappel : enveloppe de la série de Fourier du signal carré en temps continu = sinc
- en TD, l'enveloppe (noyau de Dirichlet) correspond à la périodisation de sinc ce qui implique un recouvrement : $\sin(\frac{M\pi}{N}x) / \sin(\frac{\pi}{N}x)$

Exemple 2 : série de Fourier discrète d'un signal carré - commentaires



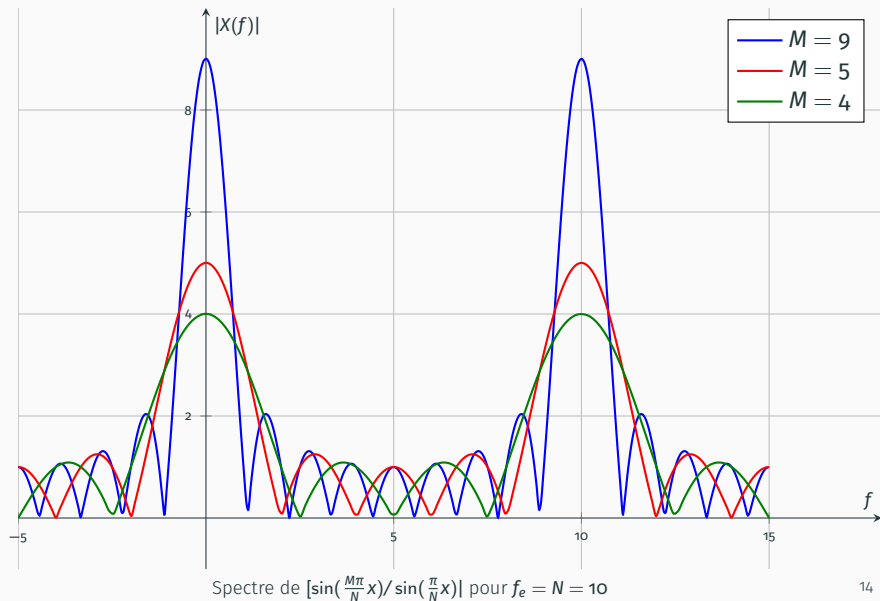
Représentation spectrale

- rappel : enveloppe de la série de Fourier du signal carré en temps continu = sinc
- en TD, l'enveloppe (noyau de Dirichlet) correspond à la périodisation de sinc ce qui implique un recouvrement : $\sin(\frac{M\pi}{N}x) / \sin(\frac{\pi}{N}x)$

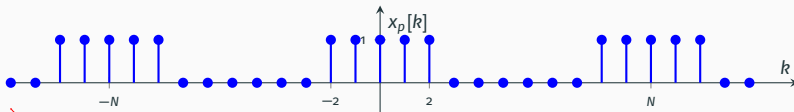
SFD et TFtd

la série de Fourier discrète échantillonne la transformée de Fourier à temps discret à un pas f_e/N

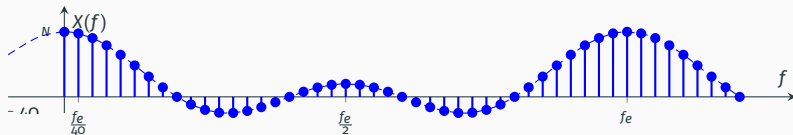
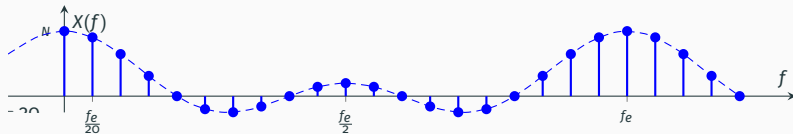
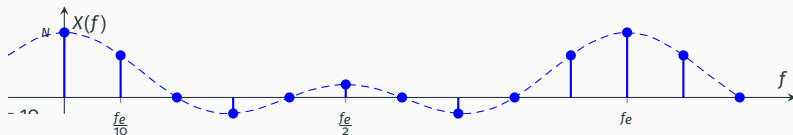
Noyau de Dirichlet : influence de M sur la TFtd



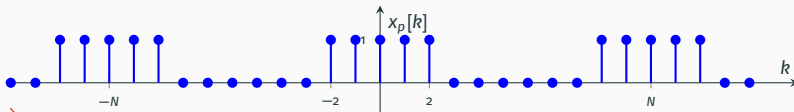
Noyau de Dirichlet : influence de N



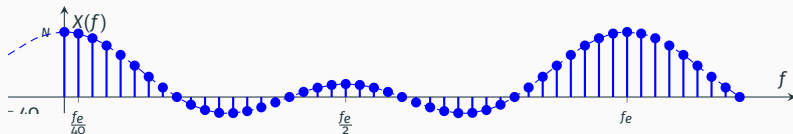
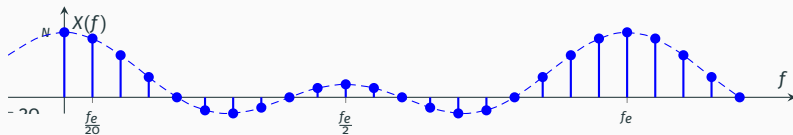
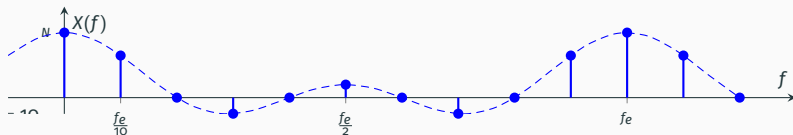
Signal carré de période N et de rapport cyclique M/N ($M=5$)



Noyau de Dirichlet : influence de N



Quand N augmente, f_e/N diminue et le spectre devient de plus en plus précis



Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

		Temps continu	Temps discret
Séries			
	Transformées	Spectre continu	
Spectre			
	Spectre de raies		

Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

	Temps continu	Temps discret
Séries	1. SF $x(t)$ temps continu $X[nf_0]$ spectre discret	4. SFD - TFD $x[kT_e]$ temps discret $X[nf_e/N]$ spectre discret périodique
Transformées	2. TF $x(t)$ temps continu $X(f)$ spectre continu	3. TFtd $x[kT_e]$ temps discret $X(f)$ spectre continu périodique

Table des matières

Transformée de Fourier en temps discret

Définition

Exemple

Série de Fourier discrète

Définition

Exemples : sinus, rectangle

Lien avec la TFtd

Transformée de Fourier discrète

Vers la TFD

Définition

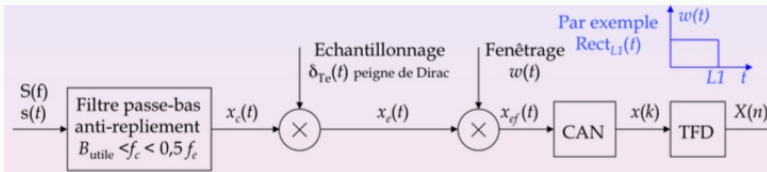
Exemple : rectangle

Paramètres de la TFD et utilisation de la **fft**

Comparaison TF - TFD

Vers la transformée de Fourier discrète (TFD)

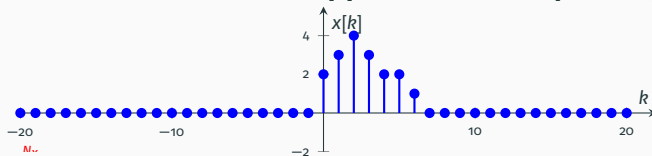
- Objectif : approcher par calcul numérique la transformée de Fourier de signaux à temps continu
- Méthodologie :



- échantillonnage et quantification du signal $x_c(t)$
- prise en compte d'un nombre fini N_x d'échantillons : fenêtrage
- le signal traité est donc un signal à TD de durée limitée $L_x = N_x \cdot T_e$
- Problème : la TFtd n'est pas calculable de manière numérique (uniquement de façon symbolique) : fonction continue de la fréquence
- Solution : périodisation du signal (période N) puis décomposition en série de Fourier discrète

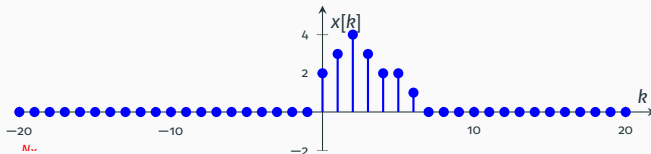
Vers la transformée de Fourier discrète (TFD)

- Soit x un signal de durée finie N_x : $x[k] = 0$ en dehors de $[0, N_x - 1]$

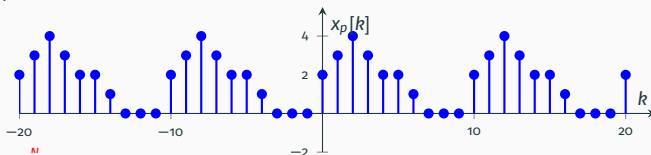


Vers la transformée de Fourier discrète (TFD)

- Soit x un signal de durée finie N_x : $x[k] = 0$ en dehors de $[0, N_x - 1]$

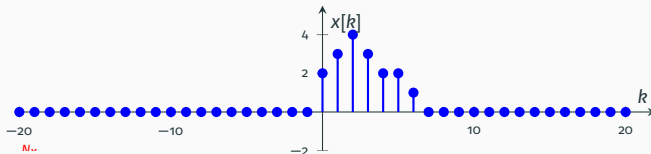


- Soit $x_p[k]$ un signal périodique égal à $x[k]$ sur une période $N \geq N_x$

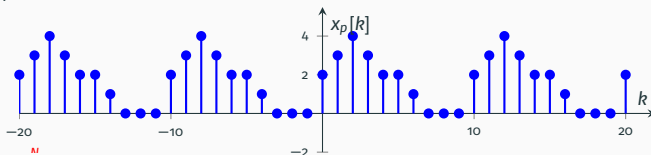


Vers la transformée de Fourier discrète (TFD)

- Soit x un signal de durée finie N_x : $x[k] = 0$ en dehors de $[0, N_x - 1]$



- Soit $x_p[k]$ un signal périodique égal à $x[k]$ sur une période $N \geq N_x$



- Les coefficients de la série de Fourier discrète sont donnés par :

$$X_p[n] = T_e \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = T_e \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = T_e \sum_{k=0}^{N_x-1} x[k] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

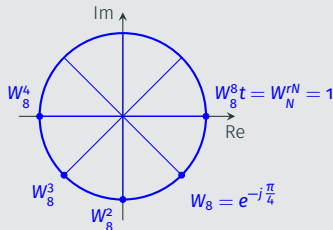
Ces coefficients sont périodiques de période N .

Transformée de Fourier discrète (TFD)

Définition

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk}, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{fft})$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



La TFD correspond à une période spectrale de la série de Fourier discrète du signal périodisé (au facteur T_e près).

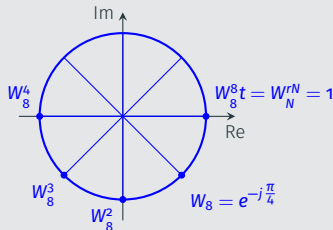
Transformée de Fourier discrète (TFD)

Définition

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk}, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{fft})$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-nk}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \quad (\text{ifft})$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



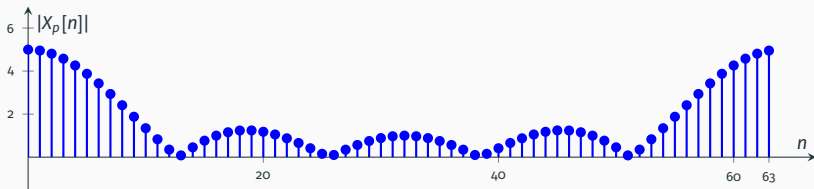
La TFD correspond à une période spectrale de la série de Fourier discrète du signal périodisé (au facteur T_e près).

Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Calcul de la TFD à N points : peut être interprété comme une périodisation du rectangle avec une période N (signal carré)

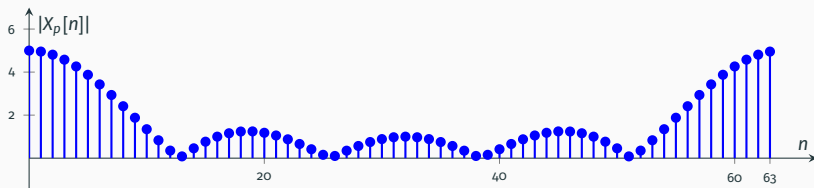
Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Calcul de la TFD à N points : peut être interprété comme une périodisation du rectangle avec une période N (signal carré)
- Spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour $N = 64$

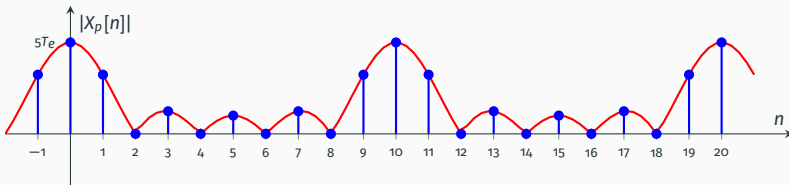


Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Calcul de la TFD à N points : peut être interprété comme une périodisation du rectangle avec une période N (signal carré)
- Spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour $N = 64$



- Rappel : lien entre [série de Fourier discrète](#) et TFtd



Lien entre TFD et TFtd

- Soit un signal $x[k]$ de durée finie N_x
- Expression de sa transformée de Fourier à temps discret TFtd

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} = T_e \sum_{k=0}^{N_x-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

Lien entre TFD et TFtd

- Soit un signal $x[k]$ de durée finie N_x
- Expression de sa transformée de Fourier à temps discret TFtd

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} = T_e \sum_{k=0}^{N_x-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- Expression de sa transformée de Fourier discrète TFD

$$\begin{aligned} X[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} && \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= \sum_{k=0}^{N_x-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} && \text{si } N_x \leq N \end{aligned}$$

Lien entre TFD et TFtd

- Soit un signal $x[k]$ de durée finie N_x
- Expression de sa transformée de Fourier à temps discret TFtd

$$X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e} = T_e \sum_{k=0}^{N_x-1} x(kT_e) e^{-j2\pi f k T_e}$$

- Expression de sa transformée de Fourier discrète TFD

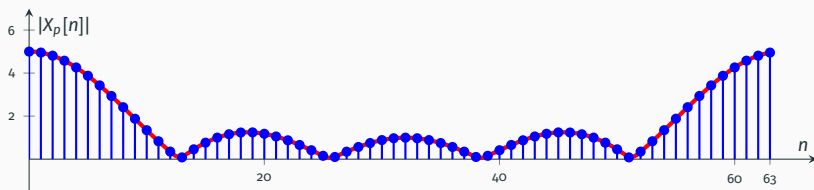
$$\begin{aligned} X[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} && \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ &= \sum_{k=0}^{N_x-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} && \text{si } N_x \leq N \end{aligned}$$

- Le calcul par TFD correspond à un calcul de la TFtd (à T_e près) en certaines valeurs de la fréquence f_n (discrétisation de la fréquence)

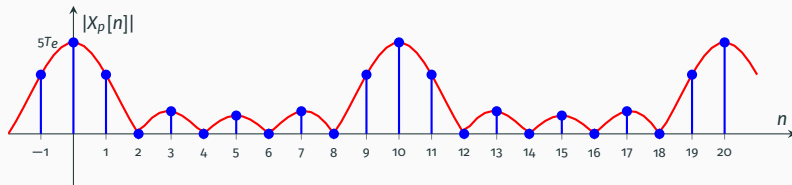
$$-j2\pi f_n k T_e = -j\frac{2\pi}{N} nk \Rightarrow f_n = \frac{n}{NT_e} = n \frac{f_e}{N}$$

Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Calcul de la TFD à N points : peut être interprété comme une périodisation du rectangle avec une période N (signal carré)
- Spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour $N = 64$



- Rappel : lien entre [série de Fourier discrète](#) et TFD



Exemple : TFD d'un rectangle

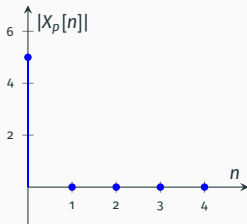
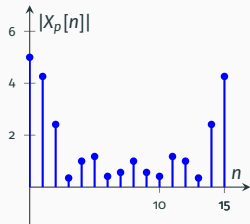
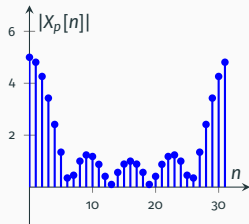
- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$

Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Représentations du spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour différentes valeurs de $N = 32, 16, 5$

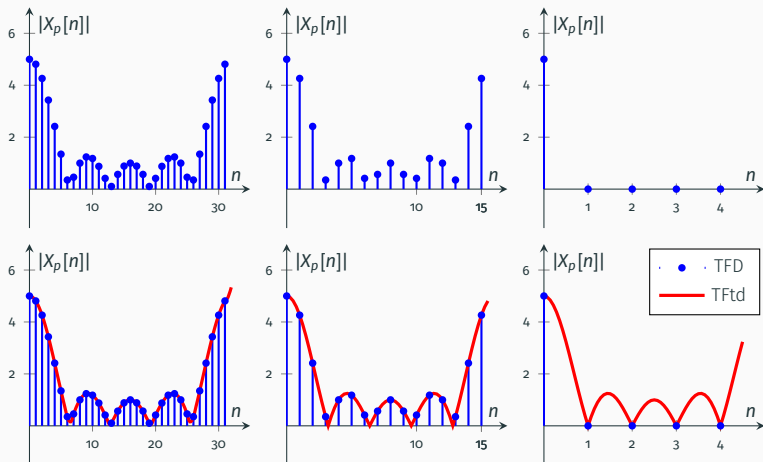
Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Représentations du spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour différentes valeurs de $N = 32, 16, 5$



Exemple : TFD d'un rectangle

- Signal $x[k] = \text{rect}_5[k]$
- Représentations du spectre d'amplitude $|X[n]|$ pour différentes valeurs de $N = 32, 16, 5$



TFD

$$X[n] = \sum_{k=0}^N x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N_x} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$N_x \in \mathbb{N}$: nombre d'échantillons du signal x ($N_x \leq N$)

- durée d'observation du signal $x[k]$: $L_x = N_x T_e$
- indice temporel : $k = 0, 1, \dots, N_x - 1$
- influence la résolution fréquentielle (capacité à distinguer 2 fréquences voisines)
- modifie la TFtd donc l'enveloppe de la TFD

TFD

$$X[n] = \sum_{k=0}^N x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N_x} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$N_x \in \mathbb{N}$: nombre d'échantillons du signal x ($N_x \leq N$)

- durée d'observation du signal $x[k]$: $L_x = N_x T_e$
- indice temporel : $k = 0, 1, \dots, N_x - 1$
- influence la résolution fréquentielle (capacité à distinguer 2 fréquences voisines)
- modifie la TFD donc l'enveloppe de la TFD

$N \in \mathbb{N}$: nombre de coefficients de Fourier

- nombre de points de calcul de la TFD
- indice relatif aux fréquences : $n = 0, 1, \dots, N-1$
- influe sur la précision du tracé ($\pm$ de points sous la même enveloppe - TFD)
- vitesse de calcul : si $N = 2m$, l'algorithme `fft` divise le temps de calcul par $N/\log_2(N)$. Pour $N = 1024$ le gain en vitesse est de 100

TFD

$$X[n] = \sum_{k=0}^N x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N_x} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[n] \in \mathbb{C}$$

Coefficients de Fourier calculés pour les fréquences successives

indice fréquentiel	0	1	2	...	n	...	$N-1$
fréquence en Hz	0	$\frac{f_e}{N}$	$\frac{2f_e}{N}$	...	$\frac{nf_e}{N}$	...	$\frac{(N-1)f_e}{N}$

TFD

$$X[n] = \sum_{k=0}^N x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N_x} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[n] \in \mathbb{C}$$

Coefficients de Fourier calculés pour les fréquences successives

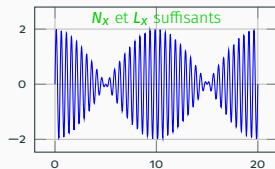
indice fréquentiel	0	1	2	...	n	...	$N-1$
fréquence en Hz	0	$\frac{f_e}{N}$	$\frac{2f_e}{N}$	...	$\frac{nf_e}{N}$	...	$\frac{(N-1)f_e}{N}$

Commande Matlab

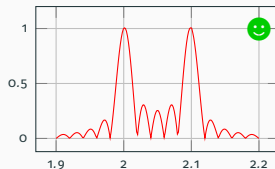
```
X = fft(x, N);
```

1. Si N est omis il est pris égal à N_x
2. Si $N > N_x$ le signal est complété avec des 0 (bourrage de zéros ou *zero padding*)
3. Si $N < N_x$ le signal est tronqué

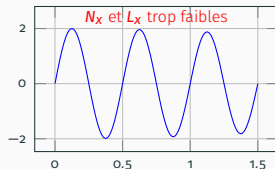
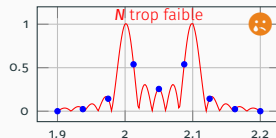
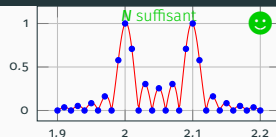
Paramètres de la TFD et utilisation de la `fft`



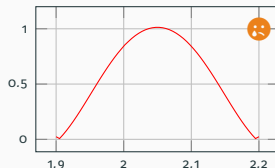
Signal à temps discret



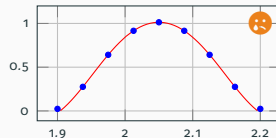
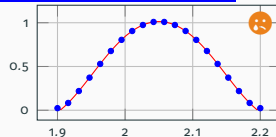
TFtd



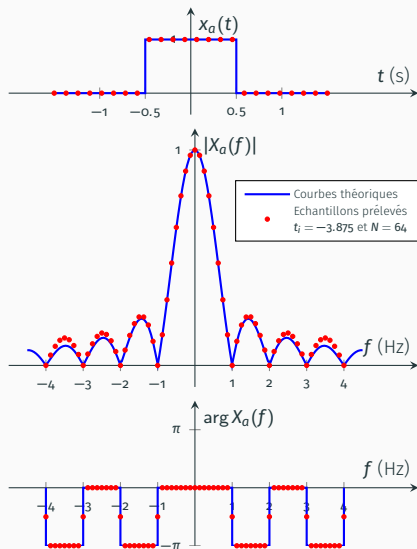
Signal à temps discret



TFtd



Comparaison TF - TFD



Comparaison TF - TFD

