

# Traitement du signal

## Échantillonnage

---

El-Hadi Djermoune

26 janvier 2026

Université de Lorraine  
Faculté des Sciences et Technologies  
L3 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS  
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4<sup>e</sup> étage  
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

De l'analogique au numérique

Synoptique d'une chaîne de traitement numérique

Échantillonnage

Notion de signal échantillonné

Modélisation mathématique

Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

Échantillonnage et interpolation

Repliement spectral

Dualité échantillonnage - périodisation

Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

- Pour de nombreuses applications le traitement analogique des signaux a été remplacé par un traitement numérique par ordinateur, DSP,... Le premier microprocesseur date de 1969 et la démocratisation des calculateurs de 1980.
- Applications concernées :
  - régulations numériques, algorithmes de commande « avancée »
  - télécommunications, automobile, radar, sonar, images (photos, vidéos, satellitaires, ...)
  - instrumentation, appareillage biomédical
- Avantages du traitement numérique :
  - plus grande flexibilité (il suffit de changer un programme)
  - possibilités de traitement accrues (par exemple inversion de matrice ou *fft*)
- Passage d'un signal **analogique** à un signal **numérique** :  
*échantillonnage* et *quantification*.

De l'analogique au numérique

Synoptique d'une chaîne de traitement numérique

Échantillonnage

Notion de signal échantillonné

Modélisation mathématique

Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

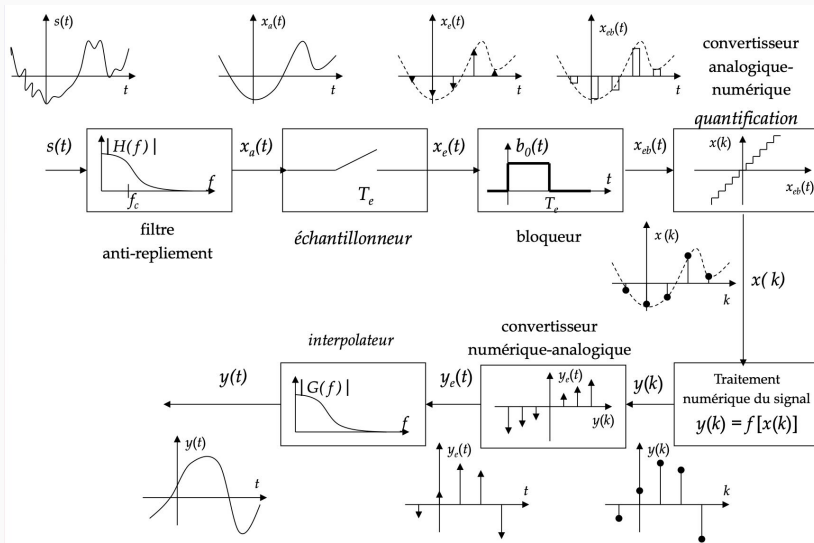
Échantillonnage et interpolation

Repliement spectral

Dualité échantillonnage - périodisation

Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

# Synoptique d'une chaîne de traitement numérique



De l'analogique au numérique

Synoptique d'une chaîne de traitement numérique

Échantillonnage

- Notion de signal échantillonné

- Modélisation mathématique

- Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

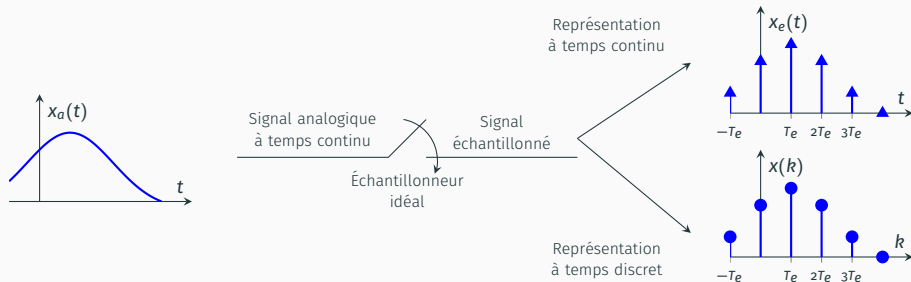
- Échantillonnage et interpolation

- Repliement spectral

- Dualité échantillonnage - périodisation

- Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

# Notion de signal échantillonné



Exemple :

$$x[k] = [1.5 \quad 2 \quad 2.2 \quad 1.8 \quad 1]$$

$$x_e(t) = 1.5\delta(t + T_e) + 2\delta(t) + 2.2\delta(t - T_e) + 1.8\delta(t - 2T_e) + \delta(t - 3T_e)$$

## Instants d'échantillonnage

- périodique (période d'échantillonnage  $T_e$ )
- non périodique (angulaire par exemple)

## Commentaires

- les échantillons prélevés devront être représentatifs du signal analogique (c'est un sondage)
- le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons
- difficulté : il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons



## Instants d'échantillonnage

- périodique (période d'échantillonnage  $T_e$ )
- non périodique (angulaire par exemple)

## Commentaires

- les échantillons prélevés devront être représentatifs du signal analogique (c'est un sondage)
- le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons
- difficulté : il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons

## Instants d'échantillonnage

- périodique (période d'échantillonnage  $T_e$ )
- non périodique (angulaire par exemple)

## Commentaires

- les échantillons prélevés devront être représentatifs du signal analogique (c'est un sondage)
- le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons
- difficulté : il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons

## Instants d'échantillonnage

- périodique (période d'échantillonnage  $T_e$ )
- non périodique (angulaire par exemple)

## Commentaires

- les échantillons prélevés devront être représentatifs du signal analogique (c'est un sondage)
- le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons
- difficulté : il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons

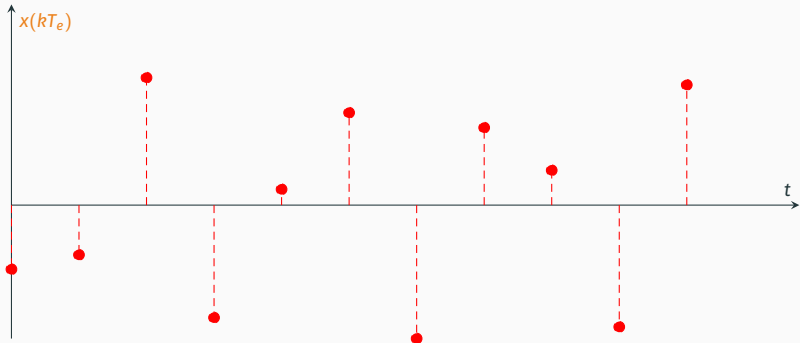
## Instants d'échantillonnage

- périodique (période d'échantillonnage  $T_e$ )
- non périodique (angulaire par exemple)

## Commentaires

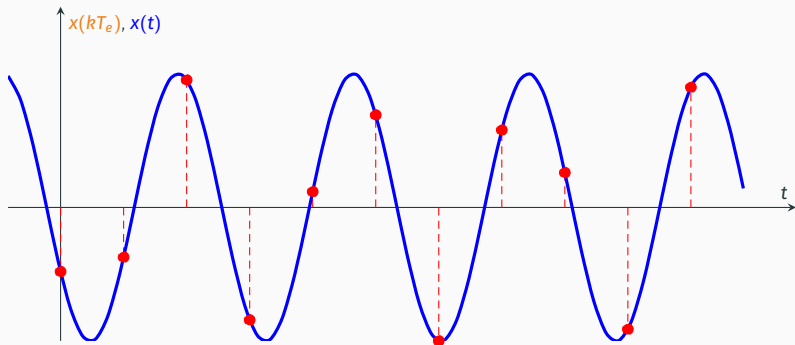
- les échantillons prélevés devront être représentatifs du signal analogique (c'est un sondage)
- le signal analogique devra pouvoir être reconstitué (interpolé) à partir des échantillons
- difficulté : il existe une infinité de signaux qui passent par ces échantillons

# Notion de signal échantillonné

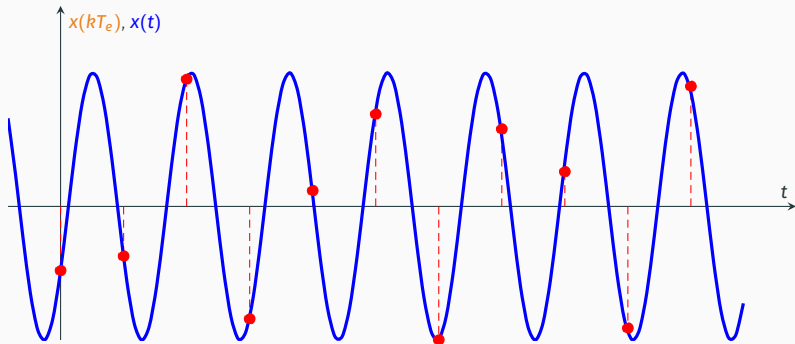


Question : à votre avis, quel type de signal analogique a été échantillonné ?

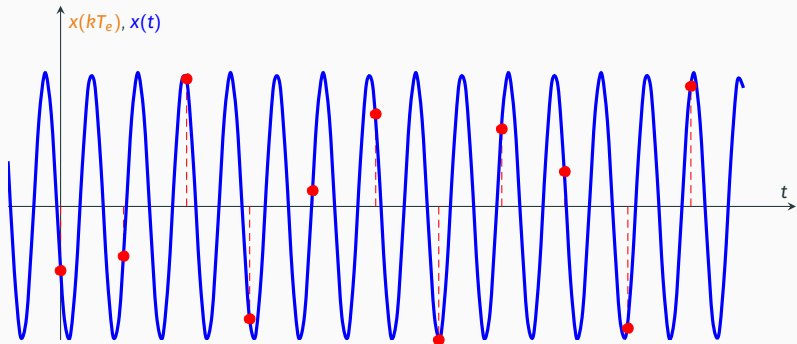
# Notion de signal échantillonné



# Notion de signal échantillonné

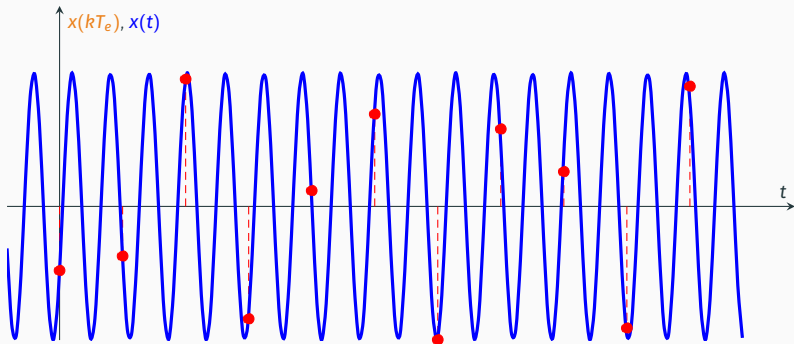


# Notion de signal échantillonné

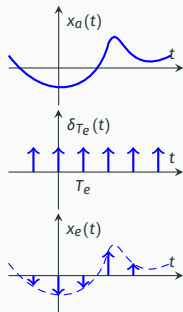
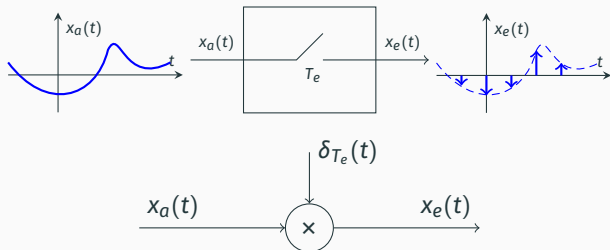




# Notion de signal échantillonné



# Modélisation mathématique de l'échantillonnage



$$\begin{aligned}x_e(t) &= x_a(t)\delta_{T_e}(t) \\&= x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - kT_e) \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(kT_e)\delta(t - kT_e)\end{aligned}$$

# Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

Rappel : multiplication dans le domaine tempore  $\Leftrightarrow$  convolution dans le domaine des fréquences (**propriété de la TF**).

$$X_e(f) = (X_a \star \Delta_{f_e})(f) \Leftrightarrow x_e(t) = x_a(t)\delta_{T_e}(t)$$

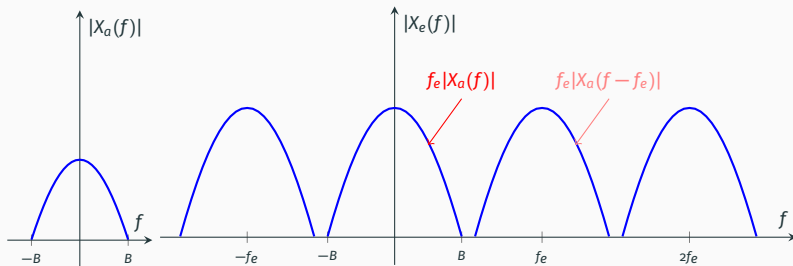
$$\begin{aligned} X_e(f) &= X_a(f) \star f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f) \star \delta(f - nf_e) \\ &= f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - nf_e) \end{aligned}$$

# Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

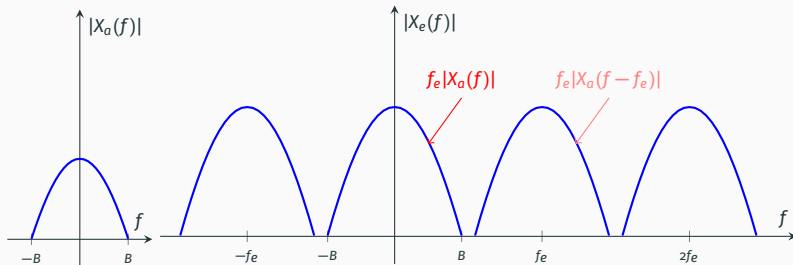
**Rappel :** multiplication dans le domaine tempore  $\Leftrightarrow$  convolution dans le domaine des fréquences (**propriété de la TF**).

$$X_e(f) = (X_a \star \Delta_{f_e})(f) \Leftrightarrow x_e(t) = x_a(t)\delta_{T_e}(t)$$

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X_a(f) \star f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f) \star \delta(f - nf_e) \\ &= f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - nf_e) \end{aligned}$$



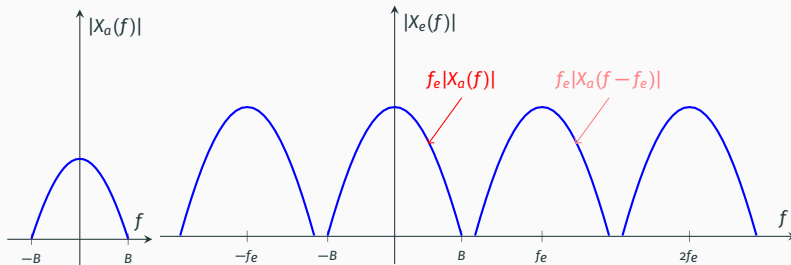
# Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel



## Périodicité de la TF d'un signal échantillonné

$$X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - nf_e)$$

# Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

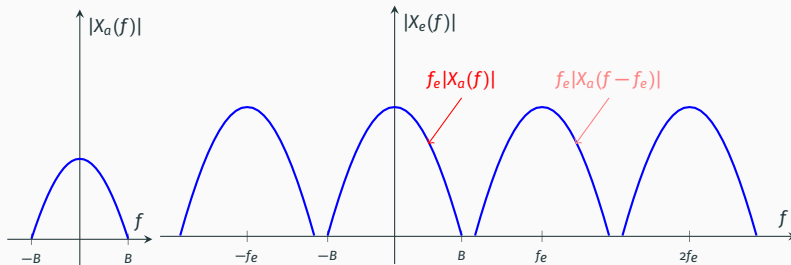


## Périodicité de la TF d'un signal échantillonné

$$X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - nf_e)$$

- La TF  $X_e(f)$  d'un signal échantillonné à la fréquence  $f_e$  est **périodique de période  $f_e$** .

# Étude de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel



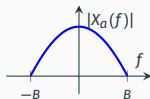
## Périodicité de la TF d'un signal échantillonné

$$X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - n f_e)$$

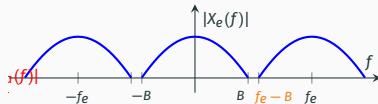
- La TF  $X_e(f)$  d'un signal échantillonné à la fréquence  $f_e$  est **périodique de période  $f_e$** .
- Elle est obtenue par addition (superposition) de répliques décalées (de  $n f_e$ ) de la TF  $X_a(f)$  du signal analogique et pondérées par  $f_e$ .

# Échantillonnage et interpolation

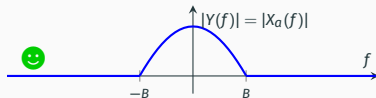
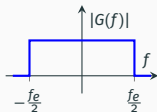
$$f_e > 2B$$



Échantillonnage



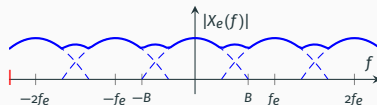
Interpolation



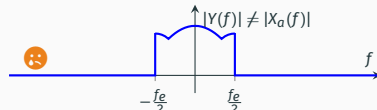
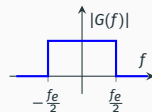
$$f_e < 2B$$



Échantillonnage



Interpolation





# Théorème d'échantillonnage et interpolation

## Enoncé du théorème d'échantillonnage et d'interpolation

Un signal  $x(t)$  à bande limitée dans l'intervalle de fréquence  $[-B, +B]$  peut être reconstruit (interpolé) exactement à partir de ses échantillons  $x_e(kT_e)$

$$\text{si } f_e > 2B$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) \operatorname{sinc}[(f_e(t - kT_e))]$$

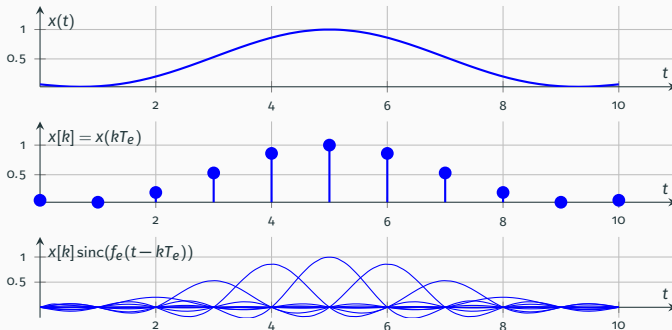
# Théorème d'échantillonnage et interpolation

## Enoncé du théorème d'échantillonnage et d'interpolation

Un signal  $x(t)$  à bande limitée dans l'intervalle de fréquence  $[-B, +B]$  peut être reconstruit (interpolé) exactement à partir de ses échantillons  $x_e(kT_e)$

$$\text{si } f_e > 2B$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) \text{sinc}[(f_e(t - kT_e))]$$



# Théorème d'échantillonnage et interpolation

## Enoncé du théorème d'échantillonnage et d'interpolation

Un signal  $x(t)$  à bande limitée dans l'intervalle de fréquence  $[-B, +B]$  peut être reconstruit (interpolé) exactement à partir de ses échantillons  $x_e(kT_e)$

si  $f_e > 2B$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_e(kT_e) \operatorname{sinc}[(f_e(t - kT_e))]$$

Historique et attribution(s) du théorème

- En 1949, Claude Shannon publie *Communication in the presence of noise* et expose sous une forme complète le théorème mais il ne s'en attribue pas le mérite et donne crédits aux travaux antérieurs
- En 1928, Harry Nyquist publie *Certain topics in telegraph transmission theory* d'où découlera la première partie du théorème
- En 1915 déjà, Edmund Whittaker contribue à la partie interpolation dans *On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory*

## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

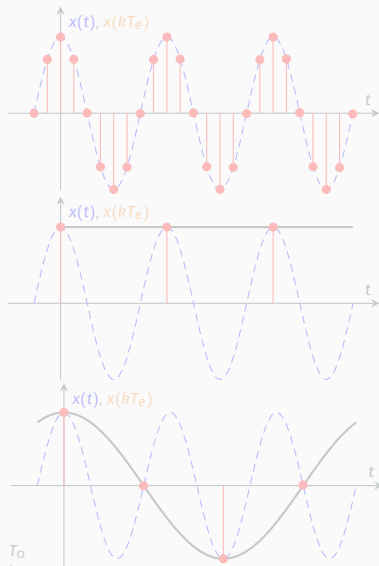


## Commentaires du théorème d'échantillonnage

- La formule d'interpolation montre que les sinus cardinaux décalés de  $kT_e$  constituent une base des signaux à bande limitée
- Cette formule d'interpolation correspond à une convolution avec un sinus cardinal qui correspond à la RI du filtre d'interpolation idéal
- Cette RI idéale n'est pas causale : en TC cela signifie que le filtre n'est pas réalisable (ce n'est qu'une relation théorique)
- Il est impossible de reconstruire exactement un signal  $x(t)$  à TC à partir d'un nombre fini d'échantillons (si  $x(t)$  est à durée limitée il ne peut pas être à bande limitée et donc le théorème ne s'applique pas)
- Si les conditions du théorème ne sont pas respectées ( $x(t)$  de durée limitée ou  $f_e$  trop faible) on observe le phénomène de repliement spectral (*aliasing*)
- Les fréquences prises en compte lors de la reconstruction sont dans la bande  $[-0.5f_e, 0.5f_e[$

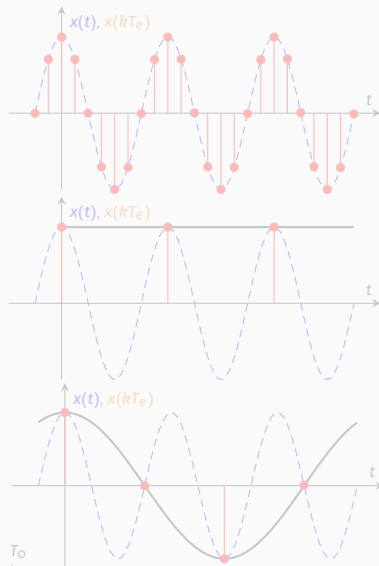
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



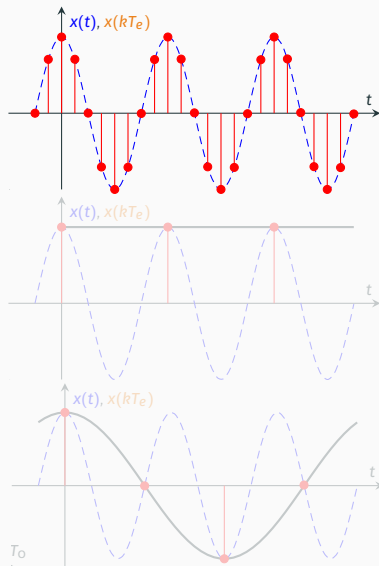
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



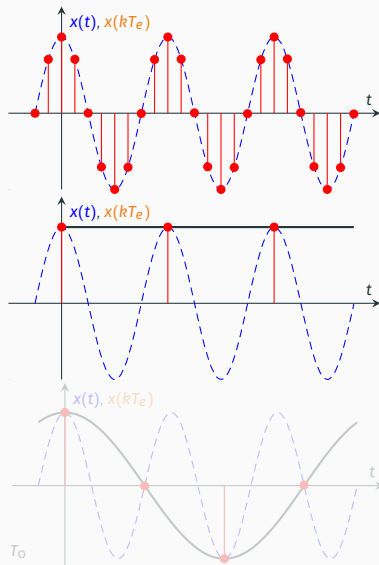
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



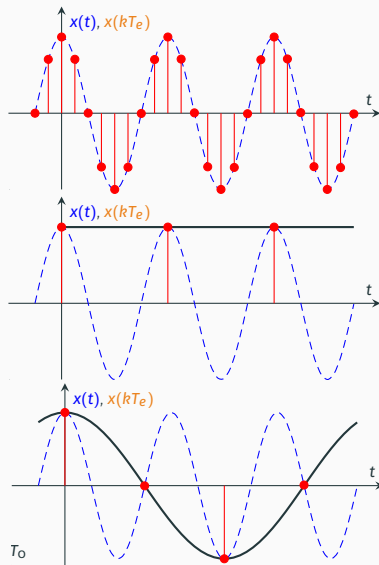
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



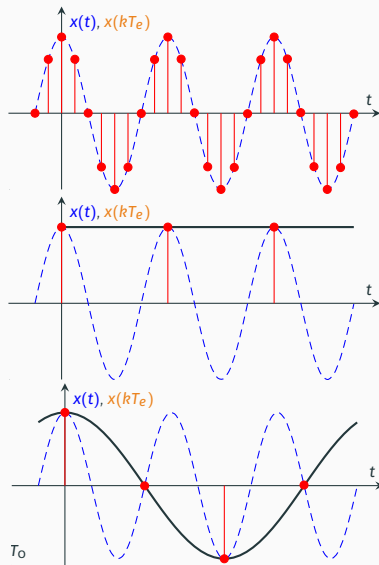
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



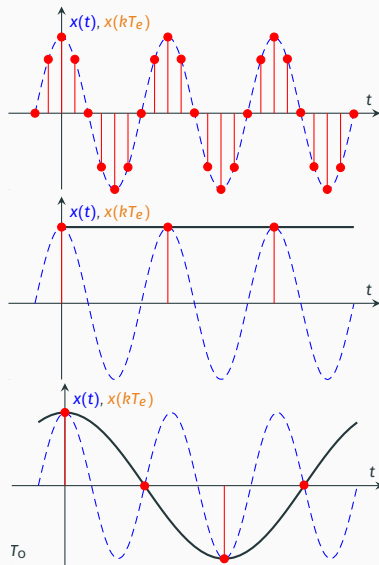
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?



# Visualisation du repliement spectral dans le domaine temporel

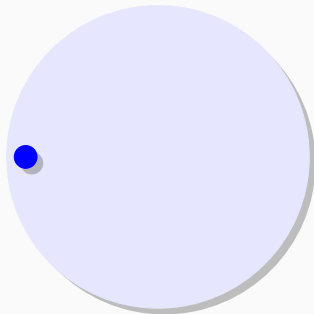
- Signal à bande limitée :  
 $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $B = f_0$ .  
Application numérique  $T_0 = 4$  s,  
d'où  $B = 0.25$  Hz
- Plusieurs choix de fréquence d'échantillonnage
  1.  $f_e = 8B$ ,  $T_e = 0.5$  s
  2.  $f_e = B$ ,  $T_e = 4$  s
  3.  $f_e = \frac{4}{3}B$ ,  $T_e = 3$  s
- Pourquoi les roues des chariots tournent-elles à l'envers dans les westerns ?
- Comment déterminer la valeur de la fréquence du repliement spectral ?





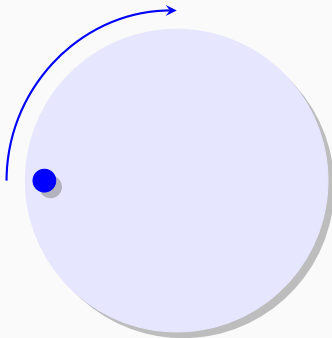
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



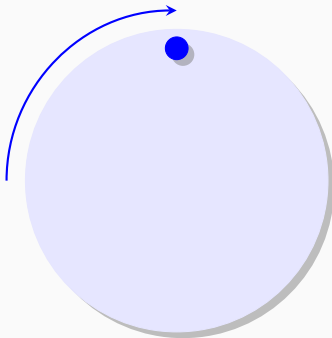
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



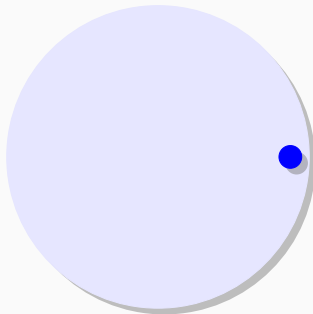
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



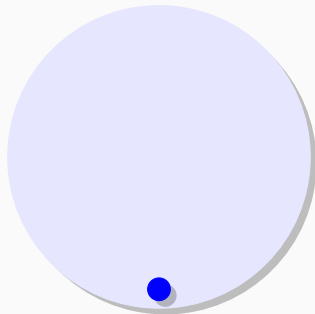
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



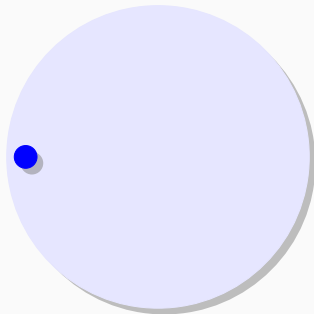
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



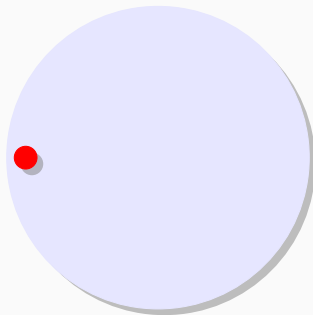
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.16 seconde** soit une vitesse de **6.25 tours/s**. Il est filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit **0.04 seconde** ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



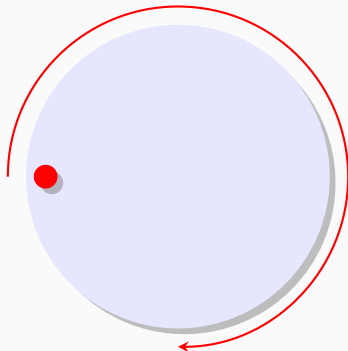
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



## La question des roues des chariots des westerns

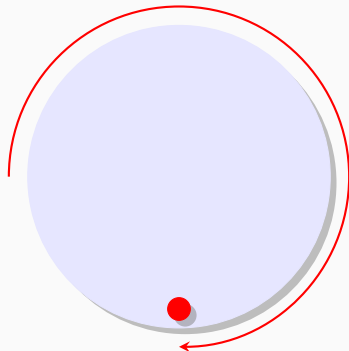
Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.





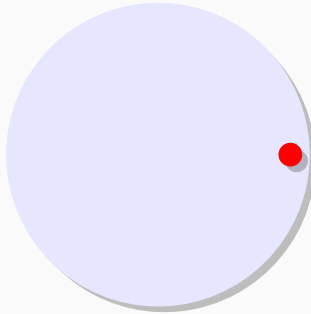
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



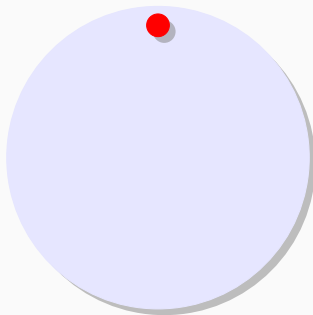
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



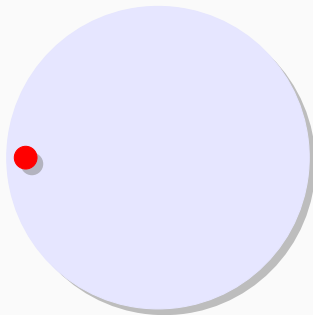
## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



## La question des roues des chariots des westerns

Disque en rotation. Un tour est accompli en **0.0533 seconde** soit une vitesse de **18.75 tours/s** : en **0.04 s** il fait trois quarts de tour. Il est toujours filmé à la cadence de **25 images par secondes** ( $f_e = 25 \text{ Hz}$ ) soit 0,04 secondes ( $T_e = 0.04 \text{ s}$ ) entre chaque image.



## La question des roues des chariots des westerns

1. Il est possible de se retrouver avec les positions bleues avec d'autres cadences de rotations. Lesquelles?

## La question des roues des chariots des westerns

1. Il est possible de se retrouver avec les positions bleues avec d'autres cadences de rotations. Lesquelles?

En faisant  $5/4 = 1.25$  tour en 0.04 seconde soit une vitesse de  $25 \times 1.25 = 31.25$  tours/seconde. Dans ce cas la vitesse apparente (6.25 tours/s) sera plus lente que la vitesse réelle. Le phénomène de repliement est alors très trompeur!

2. A quelles vitesses de rotations le point sera-t-il d'apparence immobile? C'est une application au contrôle stroboscopique de la vitesse de rotation.

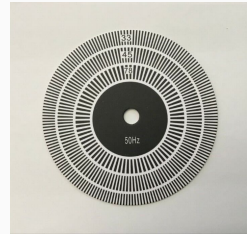
## La question des roues des chariots des westerns

1. Il est possible de se retrouver avec les positions bleues avec d'autres cadences de rotations. Lesquelles?

En faisant  $5/4 = 1.25$  tour en 0.04 seconde soit une vitesse de  $25 \times 1.25 = 31.25$  tours/seconde. Dans ce cas la vitesse apparente (6.25 tours/s) sera plus lente que la vitesse réelle. Le phénomène de repliement est alors très trompeur!

2. A quelles vitesses de rotations le point sera-t-il d'apparence immobile? C'est une application au contrôle stroboscopique de la vitesse de rotation.
3. Pour quelles vitesses de rotation du disque le film respectera-t-il le bon sens de rotation et la bonne vitesse?

# Application au contrôle stroboscopique de la vitesse de rotation des platines de lecture de disques vinyles



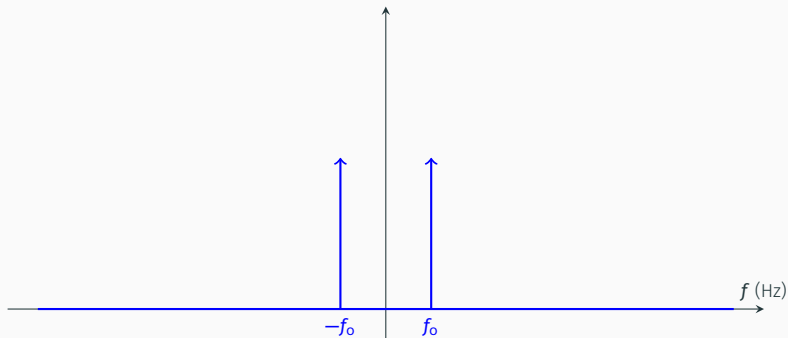


# Application au contrôle stroboscopique de la vitesse de rotation des platines de lecture de disques vinyles



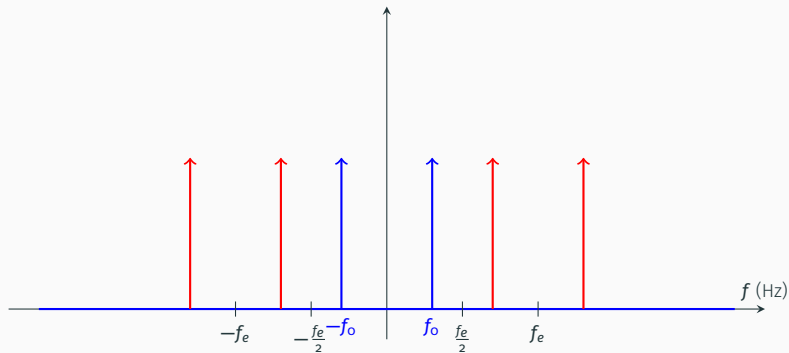
- *Pitch* : terme anglais à sens multiples. Pour la musique et en français = hauteur (fréquence) de note.
- La modification de la vitesse de rotation du disque entraîne une modification de la fréquence (hauteur) de note.

## Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel



# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

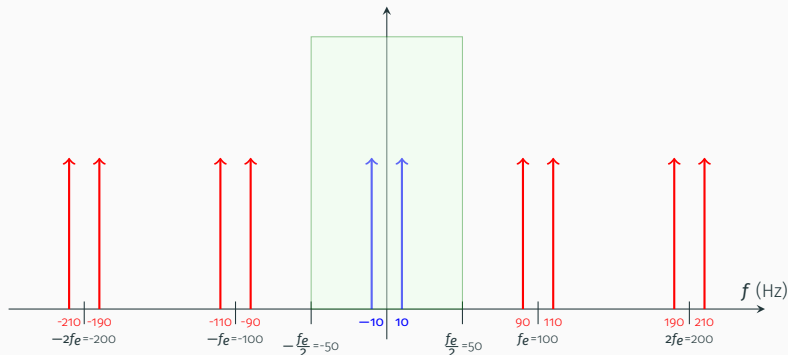
1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$



# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

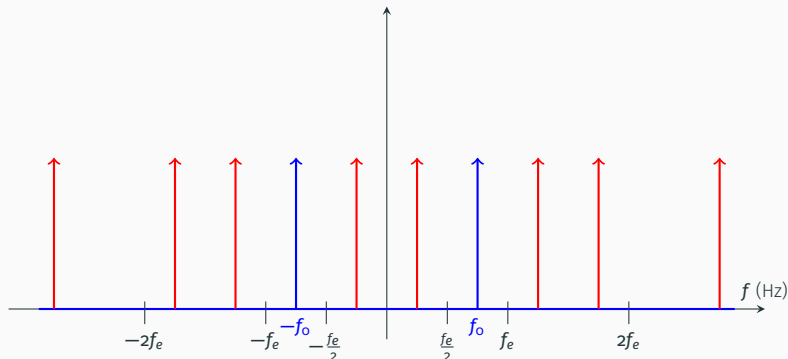
1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$

Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 100$  Hz.



# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$   
Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 100$  Hz.
2. Échantillonnage avec  $f_e < 2B$



# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

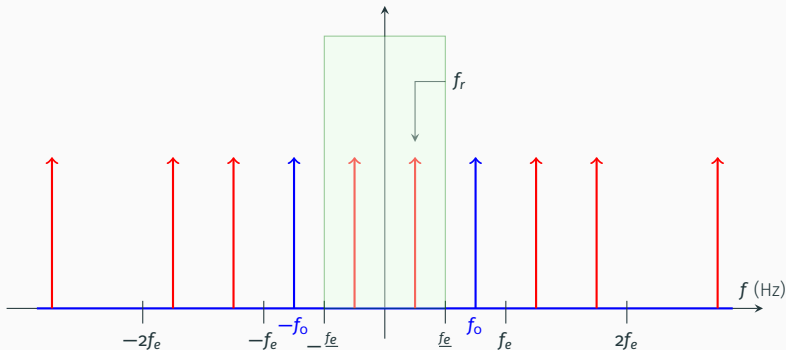
1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$

Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 100$  Hz.

2. Échantillonnage avec  $f_e < 2B$  - Exemple :  $f_e = \frac{4}{3}B \Rightarrow f_r = f_e - f_0 = \frac{f_0}{3}$ .

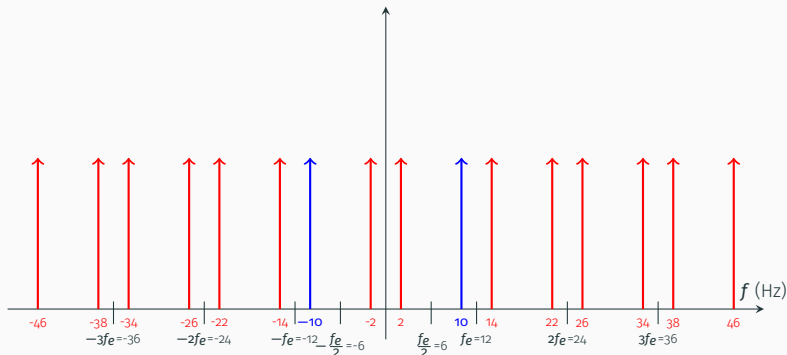
L'interpolation s'appuie sur le contenu de la bande  $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$ , soit

$f_r = \pm \frac{f_0}{3}$ . Les autres fréquences correspondent aux différents signaux sinusoïdaux qui passent également par les échantillons (vu au début du chapitre)



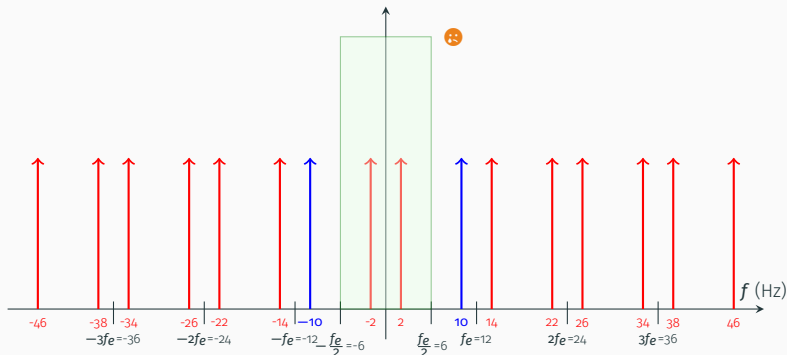
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$   
Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 100$  Hz.
2. Échantillonnage avec  $f_e < 2B$   
Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 12$  Hz.



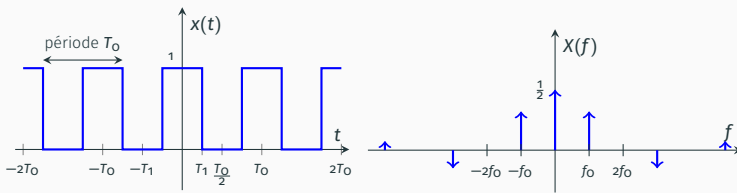
# Visualisation du repliement spectral dans le domaine fréquentiel

1. Échantillonnage avec  $f_e > 2B$   
Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 100$  Hz.
2. Échantillonnage avec  $f_e < 2B$   
Exemple :  $B = 10$  Hz et  $f_e = 12$  Hz.



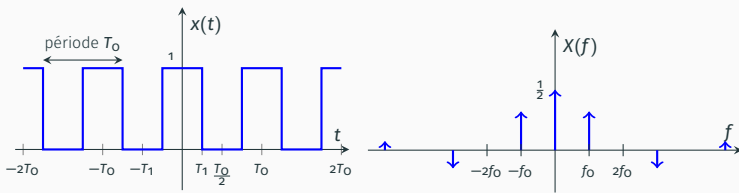


1. La transformée de Fourier d'un signal périodique est un spectre de raies

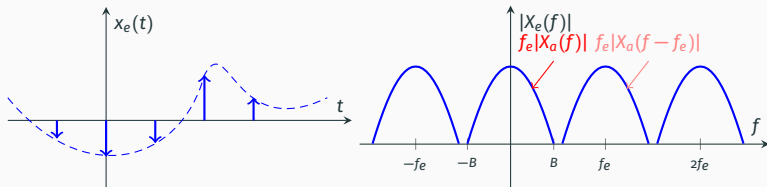


# Dualité échantillonnage - périodisation

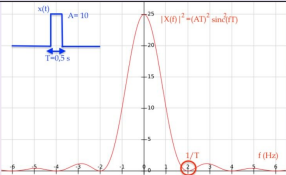
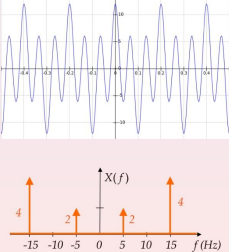
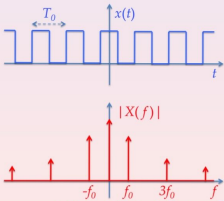
1. La transformée de Fourier d'un signal périodique est un spectre de raies



2. La transformée de Fourier d'un signal échantillonné est périodique



# Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

|                 | Bande limitée                                                                     | Bande illimitée                                                                    |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Durée limitée   | IMPOSSIBLE                                                                        |  |
| Durée illimitée |  |  |

## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée

## Mise en œuvre

## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie

## Mise en œuvre

## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie
- quelle que soit la valeur de  $f_e$  on observera le phénomène de repliement

## Mise en œuvre

# Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie
- quelle que soit la valeur de  $f_e$  on observera le phénomène de repliement

## Mise en œuvre

- pour minimiser ce phénomène on utilise un **filtre antirepliement** (filtre **analogique** passe-bas)



## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie
- quelle que soit la valeur de  $f_e$  on observera le phénomène de repliement

## Mise en œuvre

- pour minimiser ce phénomène on utilise un **filtre antirepliement** (filtre **analogique** passe-bas)
- la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre antirepliement est choisie de façon à atténuer toutes les fréquences au-delà de la bande « utile »





## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie
- quelle que soit la valeur de  $f_e$  on observera le phénomène de repliement

## Mise en œuvre

- pour minimiser ce phénomène on utilise un **filtre antirepliement** (filtre **analogique** passe-bas)
- la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre antirepliement est choisie de façon à atténuer toutes les fréquences au-delà de la bande « utile »
- la fréquence d'échantillonnage est fixée à  $f_e > 2f_c$



# Le théorème d'échantillonnage et d'interpolation en pratique

## Caractéristiques des signaux à échantillonner en pratique

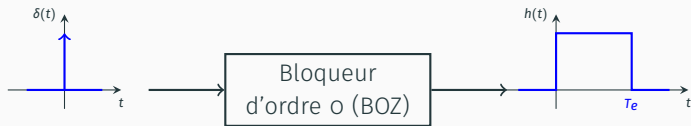
- $x(t)$  est de durée limitée
- donc sa largeur de bande est infinie
- quelle que soit la valeur de  $f_e$  on observera le phénomène de repliement

## Mise en œuvre

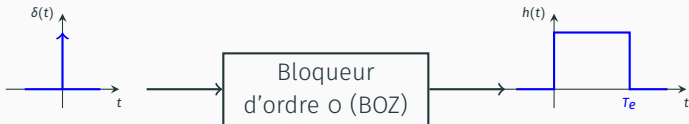
- pour minimiser ce phénomène on utilise un **filtre antirepliement** (filtre **analogique** passe-bas)
- la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre antirepliement est choisie de façon à atténuer toutes les fréquences au-delà de la bande « utile »
- la fréquence d'échantillonnage est fixée à  $f_e > 2f_c$
- l'interpolateur idéal est approché par exemple par des bloqueurs



## Interpolation avec un bloqueur d'ordre zéro

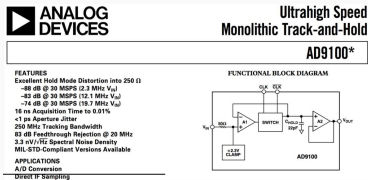


# Interpolation avec un bloqueur d'ordre zéro



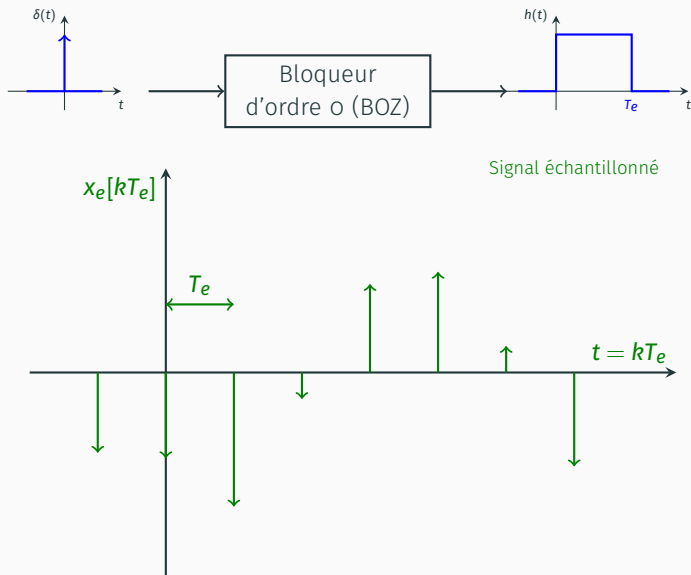
Le bloqueur d'ordre zéro<sup>1</sup> est un composant qui est utilisé :

1. de manière quasi-systématique dans la phase de conversion analogique/numérique. Il est alors associé à l'échantillonneur dans un circuit S/H (*sample and hold* ou *track and hold*);
2. pour certaines applications (régulation numérique par exemple) dans la phase de conversion numérique/analogique (interpolation).

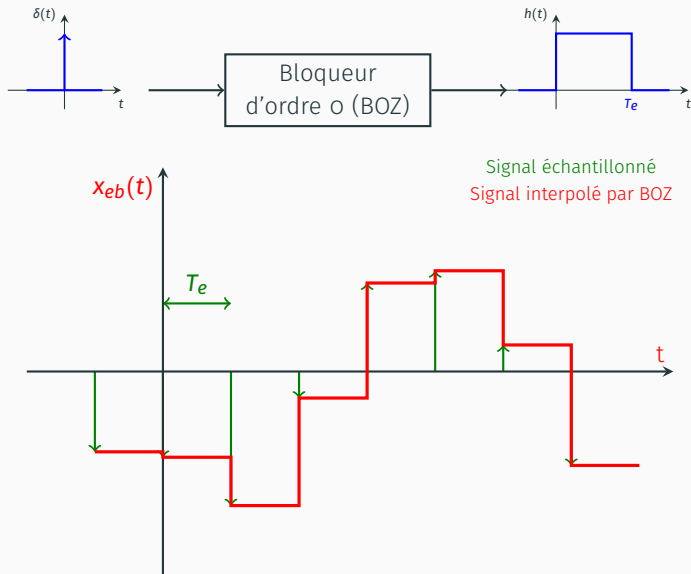


1. Une liste de circuits est consultable ici :

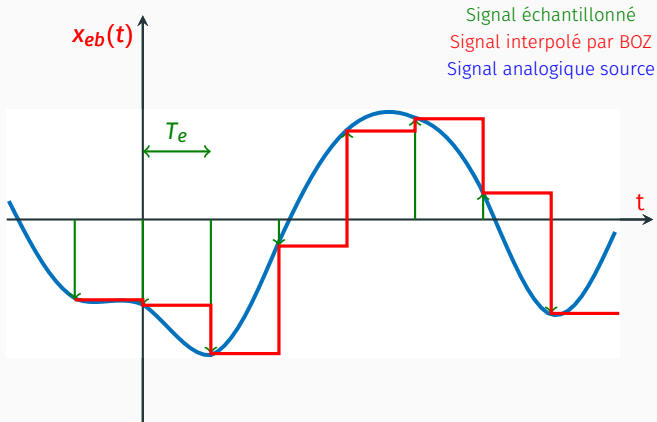
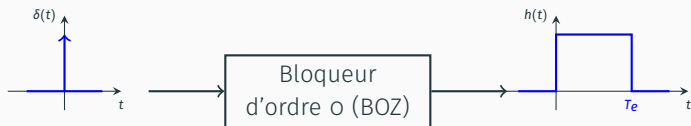
# Interpolation avec un bloqueur d'ordre zéro



# Interpolation avec un bloqueur d'ordre zéro



# Interpolation avec un bloqueur d'ordre zéro



## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

1. Pour choisir une période d'échantillonnage il faut tout d'abord déterminer la **bande utile**  $B_u$  du signal que l'on veut analyser ou traiter numériquement/



## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

1. Pour choisir une période d'échantillonnage il faut tout d'abord déterminer la **bande utile**  $B_u$  du signal que l'on veut analyser ou traiter numériquement/
2. puis respecter la règle  $B_u < f_c < 0.5f_e$  où  $f_c$  correspond à la fréquence de coupure du filtre analogique anti-repliement.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

1. Pour choisir une période d'échantillonnage il faut tout d'abord déterminer la **bande utile**  $B_u$  du signal que l'on veut analyser ou traiter numériquement/
2. puis respecter la règle  $B_u < f_c < 0.5f_e$  où  $f_c$  correspond à la fréquence de coupure du filtre analogique anti-repliement.
3. Une préconisation courante pour choisir  $f_e$  est de prendre une dizaine de fois  $B_u$ .

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

1. Pour choisir une période d'échantillonnage il faut tout d'abord déterminer la **bande utile**  $B_u$  du signal que l'on veut analyser ou traiter numériquement/
2. puis respecter la règle  $B_u < f_c < 0.5f_e$  où  $f_c$  correspond à la fréquence de coupure du filtre analogique anti-repliement.
3. Une préconisation courante pour choisir  $f_e$  est de prendre une dizaine de fois  $B_u$ .
4. Il y aura du repliement mais celui-ci sera atténué et cela d'autant plus que le filtre sera à flanc raide (par exemple un filtre linéaire du 6<sup>e</sup> ordre à  $-120$  dB/décade).
5. Il ne faut pas chercher à échantillonner trop vite (une centaine de fois  $B_u$  par exemple) car cela consomme de la mémoire et de l'espace de stockage, de l'énergie et est susceptible de nuire aux éventuels traitements numériques, en raison d'une dégradation de ce que l'on appelle le conditionnement numérique d'un problème (l'amplification trop importante de faibles erreurs numériques).

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4186 Hz dans la gamme tempérée.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4 186 Hz dans la gamme tempérée.
- La vibration d'une corde ne produit pas un son pur mais va engendrer des harmoniques (des multiples de 4 186 Hz).

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4 186 Hz dans la gamme tempérée.
- La vibration d'une corde ne produit pas un son pur mais va engendrer des harmoniques (des multiples de 4 186 Hz).
- Toutefois l'ouïe humaine la plus fine ne perçoit les fréquences que jusque vers 16 kHz voire 20 kHz (selon les références consultées). Les harmoniques au delà du rang 3 (ou du rang 4) ne sont donc plus audibles et n'ont donc pas besoin d'être numérisées.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4 186 Hz dans la gamme tempérée.
- La vibration d'une corde ne produit pas un son pur mais va engendrer des harmoniques (des multiples de 4 186 Hz).
- Toutefois l'ouïe humaine la plus fine ne perçoit les fréquences que jusque vers 16 kHz voire 20 kHz (selon les références consultées). Les harmoniques au delà du rang 3 (ou du rang 4) ne sont donc plus audibles et n'ont donc pas besoin d'être numérisées.
- Nous pouvons alors fixer  $B_u = 16$  kHz puis mettre en place un filtre anti-repliement et enfin échantillonner à plus de 32 kHz.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4 186 Hz dans la gamme tempérée.
- La vibration d'une corde ne produit pas un son pur mais va engendrer des harmoniques (des multiples de 4 186 Hz).
- Toutefois l'ouïe humaine la plus fine ne perçoit les fréquences que jusque vers 16 kHz voire 20 kHz (selon les références consultées). Les harmoniques au delà du rang 3 (ou du rang 4) ne sont donc plus audibles et n'ont donc pas besoin d'être numérisées.
- Nous pouvons alors fixer  $B_u = 16$  kHz puis mettre en place un filtre anti-repliement et enfin échantillonner à plus de 32 kHz.
- Si l'on suit la préconisation courante  $f_e = 160$  kHz.



# Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple dans le domaine de la musique

- La touche la plus à droite d'un piano classique à 88 touches est accordée à 4 186 Hz dans la gamme tempérée.
- La vibration d'une corde ne produit pas un son pur mais va engendrer des harmoniques (des multiples de 4 186 Hz).
- Toutefois l'ouïe humaine la plus fine ne perçoit les fréquences que jusque vers 16 kHz voire 20 kHz (selon les références consultées). Les harmoniques au delà du rang 3 (ou du rang 4) ne sont donc plus audibles et n'ont donc pas besoin d'être numérisées.
- Nous pouvons alors fixer  $B_u = 16$  kHz puis mettre en place un filtre anti-repliement et enfin échantillonner à plus de 32 kHz.
- Si l'on suit la préconisation courante  $f_e = 160$  kHz.
- Dans le domaine du CD, c'est une fréquence d'échantillonnage de 44.1 kHz qui a été choisie à l'origine (Sony et Philips); même si elle est assez basse, elle respecte la règle et permet de stocker jusqu'à 74 minutes et 33 secondes de musique stéréo (×2 voies) sur 16 bits.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

### Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

### Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.
- Sa constante de temps est donc de l'ordre de  $T = 10$  secondes.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

### Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.
- Sa constante de temps est donc de l'ordre de  $T = 10$  secondes.
- Sa réponse en fréquence a une pulsation de coupure  $2\pi f_c = \frac{1}{T} = 0.1$  rad/s et donc une fréquence de coupure  $f_c = 0.016$  Hz.

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

### Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.
- Sa constante de temps est donc de l'ordre de  $T = 10$  secondes.
- Sa réponse en fréquence a une pulsation de coupure  $2\pi f_c = \frac{1}{T} = 0.1$  rad/s et donc une fréquence de coupure  $f_c = 0.016$  Hz.
- Une décade plus loin (0.16 Hz) le gain dynamique aura été atténué d'un facteur 10 (pente de  $-20$  dB/décade sur un diagramme de Bode).

## Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

### Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.
- Sa constante de temps est donc de l'ordre de  $T = 10$  secondes.
- Sa réponse en fréquence a une pulsation de coupure  $2\pi f_c = \frac{1}{T} = 0.1$  rad/s et donc une fréquence de coupure  $f_c = 0.016$  Hz.
- Une décade plus loin (0.16 Hz) le gain dynamique aura été atténué d'un facteur 10 (pente de  $-20$  dB/décade sur un diagramme de Bode).
- Si l'on choisit  $f_e$  aux alentours de cette fréquence, disons  $f_e = 0.2$  Hz alors  $T_e = 5$  secondes (à comparer au temps de réponse de 30 sec).

# Comment bien choisir une période d'échantillonnage ?

$$B_u < f_c < 0.5f_e$$

## Exemple de capteur

- transforme une grandeur physique (entrée) en une grandeur électrique (sortie) que l'on peut numériser.
- Supposons que le capteur se comporte comme un SLI du premier ordre avec un temps de réponse à un échelon de 30 secondes.
- Sa constante de temps est donc de l'ordre de  $T = 10$  secondes.
- Sa réponse en fréquence a une pulsation de coupure  $2\pi f_c = \frac{1}{T} = 0.1$  rad/s et donc une fréquence de coupure  $f_c = 0.016$  Hz.
- Une décade plus loin (0.16 Hz) le gain dynamique aura été atténué d'un facteur 10 (pente de  $-20$  dB/décade sur un diagramme de Bode).
- Si l'on choisit  $f_e$  aux alentours de cette fréquence, disons  $f_e = 0.2$  Hz alors  $T_e = 5$  secondes (à comparer au temps de réponse de 30 sec).
- Bien sûr, le risque de repliement demeure mais les fréquences repliées sont atténuées d'au moins un facteur 10 : pour les atténuer plus il faudrait soit augmenter  $f_e$  et/ou adjoindre un filtre anti-repliement au capteur.