

Traitement du signal

Analyse de Fourier en temps continu 2/2

El-Hadi Djermoune

26 janvier 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L3 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Transformée de Fourier

De la série à la transformée de Fourier

Transformée de Fourier de signaux d'énergie finie

Propriétés

Signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

Spectre de raies

À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

Peigne de Dirac

Quelques exemples de spectres

Transformée de Fourier et convolution

Lien entre transformations

De la série à la transformée de Fourier

- Rappel : coefficients de Fourier du rectangle $X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$

- Retour au lien avec le produit scalaire

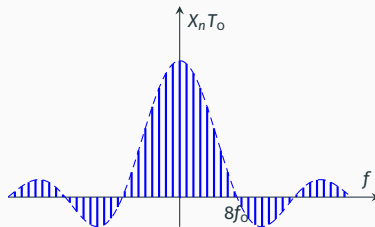
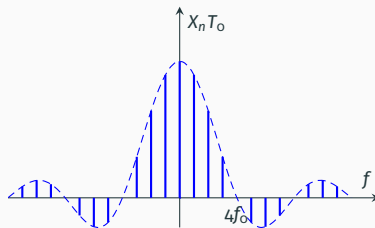
$$\langle x, \psi_n \rangle = X_n T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$$

- Expression de l'enveloppe de $X_n T_0$:

$$2T_1 \text{sinc}(2fT_1) \Big|_{f=nf_0}$$

Cette expression est indépendante de T_0

- Lorsque la durée d'observation T_0 augmente f_0 diminue
- La transformée de Fourier qui correspond à l'enveloppe va être définie pour $T_0 \rightarrow +\infty$



De la série à la transformée de Fourier

- Rappel : coefficients de Fourier du rectangle $X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$
- Retour au lien avec le produit scalaire

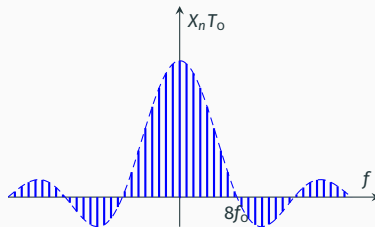
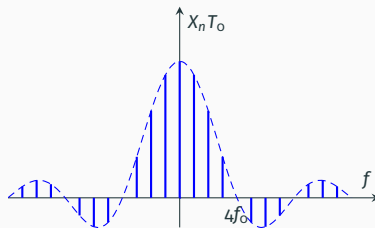
$$\langle x, \psi_n \rangle = X_n T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$$

- Expression de l'enveloppe de $X_n T_0$:

$$2T_1 \text{sinc}(2fT_1) \Big|_{f=nf_0}$$

Cette expression est indépendante de T_0

- Lorsque la durée d'observation T_0 augmente f_0 diminue
- La transformée de Fourier qui correspond à l'enveloppe va être définie pour $T_0 \rightarrow +\infty$



De la série à la transformée de Fourier

- Rappel : coefficients de Fourier du rectangle $X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$

- Retour au lien avec le produit scalaire

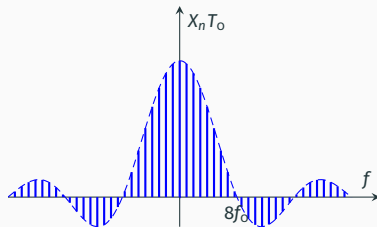
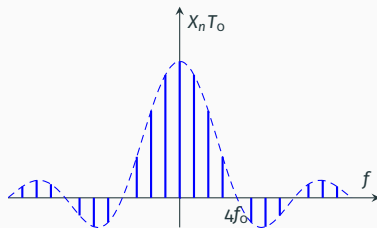
$$\langle x, \psi_n \rangle = X_n T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$$

- Expression de l'enveloppe de $X_n T_0$:

$$2T_1 \text{sinc}(2fT_1) \Big|_{f=nf_0}$$

Cette expression est indépendante de T_0

- Lorsque la durée d'observation T_0 augmente f_0 diminue
- La transformée de Fourier qui correspond à l'enveloppe va être définie pour $T_0 \rightarrow +\infty$



De la série à la transformée de Fourier

- Rappel : coefficients de Fourier du rectangle $X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$

- Retour au lien avec le produit scalaire

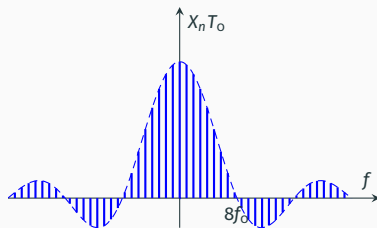
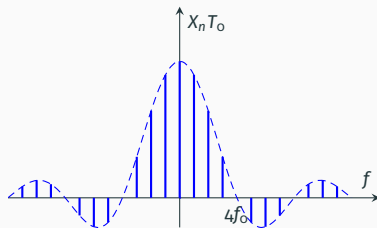
$$\langle x, \psi_n \rangle = X_n T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$$

- Expression de l'enveloppe de $X_n T_0$:

$$2T_1 \text{sinc}(2fT_1) \Big|_{f=nf_0}$$

Cette expression est indépendante de T_0

- Lorsque la durée d'observation T_0 augmente f_0 diminue
- La transformée de Fourier qui correspond à l'enveloppe va être définie pour $T_0 \rightarrow +\infty$



De la série à la transformée de Fourier

- Rappel : coefficients de Fourier du rectangle $X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$

- Retour au lien avec le produit scalaire

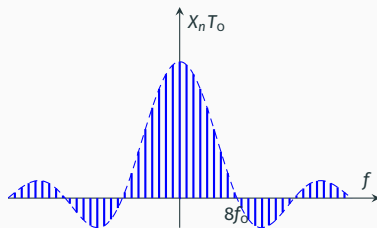
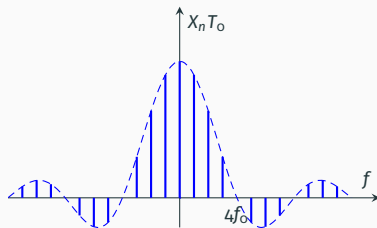
$$\langle x, \psi_n \rangle = X_n T_0 = 2T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1)$$

- Expression de l'enveloppe de $X_n T_0$:

$$2T_1 \text{sinc}(2fT_1) \Big|_{f=nf_0}$$

Cette expression est indépendante de T_0

- Lorsque la durée d'observation T_0 augmente f_0 diminue
- La transformée de Fourier qui correspond à l'enveloppe va être définie pour $T_0 \rightarrow +\infty$



Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à temps continu d'énergie finie est définie par une fonction complexe $X(f)$

$$X(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule d'analyse}$$

- La transformée de Fourier inverse a une expression très proche

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \langle X(f), e^{-j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule de synthèse}$$

- La symétrie des formules évoque une dualité temps-fréquence
- Remarque :** les formules données en fonction de la pulsation ω sont légèrement différentes

Convergence (existence)

Si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ alors $X(f)$ converge et $X(f) \in L^2(\mathbb{R}) \implies$ la transformée inverse peut donc être calculée.

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à temps continu d'énergie finie est définie par une fonction complexe $X(f)$

$$X(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule d'analyse}$$

- La transformée de Fourier inverse a une expression très proche

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \langle X(f), e^{-j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule de synthèse}$$

- La symétrie des formules évoque une dualité temps-fréquence
- Remarque :** les formules données en fonction de la pulsation ω sont légèrement différentes

Convergence (existence)

Si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ alors $X(f)$ converge et $X(f) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ la transformée inverse peut donc être calculée.

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à temps continu d'énergie finie est définie par une fonction complexe $X(f)$

$$X(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule d'analyse}$$

- La transformée de Fourier inverse a une expression très proche

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \langle X(f), e^{-j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule de synthèse}$$

- La symétrie des formules évoque une dualité temps-fréquence
- Remarque :** les formules données en fonction de la pulsation ω sont légèrement différentes

Convergence (existence)

Si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ alors $X(f)$ converge et $X(f) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ la transformée inverse peut donc être calculée.

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ à temps continu d'énergie finie est définie par une fonction complexe $X(f)$

$$X(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \langle x(t), e^{j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule d'analyse}$$

- La transformée de Fourier inverse a une expression très proche

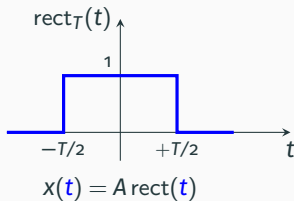
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \langle X(f), e^{-j2\pi f t} \rangle \quad \text{Formule de synthèse}$$

- La symétrie des formules évoque une dualité temps-fréquence
- Remarque :** les formules données en fonction de la pulsation ω sont légèrement différentes

Convergence (existence)

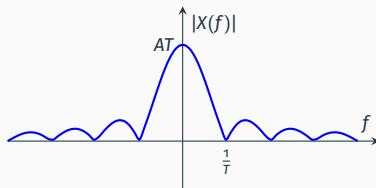
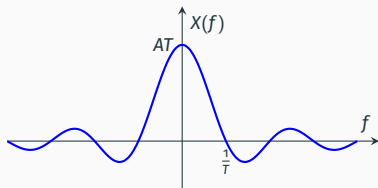
Si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ alors $X(f)$ converge et $X(f) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ la transformée inverse peut donc être calculée.

Exemple : transformée de Fourier d'un rectangle

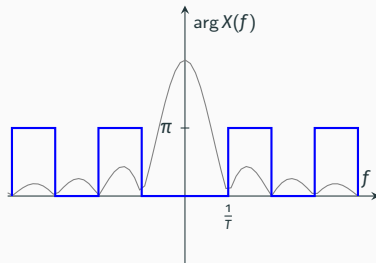
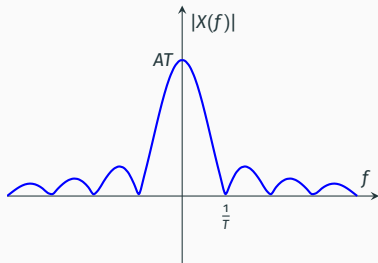


$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi f t} dt = \dots = AT \text{sinc}(Tf)$$

Exercice : démontrer ce résultat.

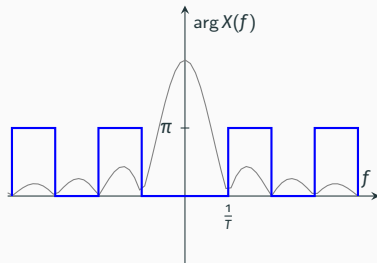
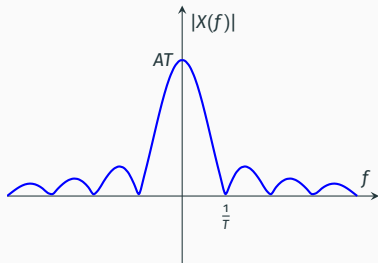


Dualité rectangle - sinus cardinal



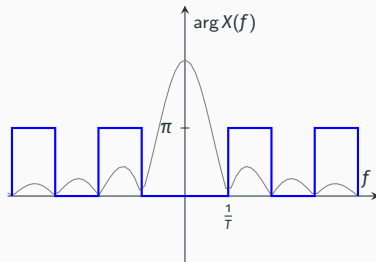
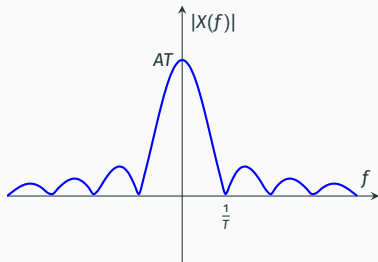
- Plus le rectangle s'élargit (T augmente), plus le spectre se rétrécit et plus l'énergie $|X(f)|^2$ se concentre en basse fréquence
- Un signal ne peut pas être à la fois concentré en temps (impulsion rectangulaire brève) et en fréquence
- Le signal rectangle joue un rôle important en traitement du signal (fenêtrage par exemple), sa transformée de Fourier (sinus cardinal) a, du coup, la même importance
- Le signal sinus cardinal a pour transformée de Fourier un rectangle : c'est la **dualité** de la transformée de Fourier

Dualité rectangle - sinus cardinal



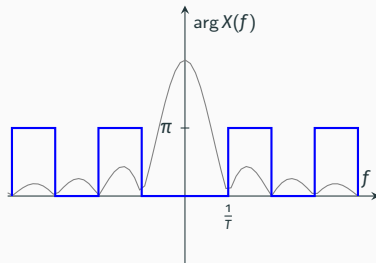
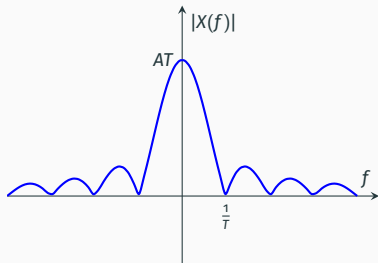
- Plus le rectangle s'élargit (T augmente), plus le spectre se rétrécit et plus l'énergie $|X(f)|^2$ se concentre en basse fréquence
- Un signal ne peut pas être à la fois concentré en temps (impulsion rectangulaire brève) et en fréquence
- Le signal rectangle joue un rôle important en traitement du signal (fenêtrage par exemple), sa transformée de Fourier (sinus cardinal) a, du coup, la même importance
- Le signal sinus cardinal a pour transformée de Fourier un rectangle : c'est la **dualité** de la transformée de Fourier

Dualité rectangle - sinus cardinal



- Plus le rectangle s'élargit (T augmente), plus le spectre se rétrécit et plus l'énergie $|X(f)|^2$ se concentre en basse fréquence
- Un signal ne peut pas être à la fois concentré en temps (impulsion rectangulaire brève) et en fréquence
- Le signal rectangle joue un rôle important en traitement du signal (fenêtrage par exemple), sa transformée de Fourier (sinus cardinal) a, du coup, la même importance
- Le signal sinus cardinal a pour transformée de Fourier un rectangle : c'est la **dualité** de la transformée de Fourier

Dualité rectangle - sinus cardinal



- Plus le rectangle s'élargit (T augmente), plus le spectre se rétrécit et plus l'énergie $|X(f)|^2$ se concentre en basse fréquence
- Un signal ne peut pas être à la fois concentré en temps (impulsion rectangulaire brève) et en fréquence
- Le signal rectangle joue un rôle important en traitement du signal (fenêtrage par exemple), sa transformée de Fourier (sinus cardinal) a, du coup, la même importance
- Le signal sinus cardinal a pour transformée de Fourier un rectangle : c'est la **dualité** de la transformée de Fourier

Transformée de Fourier

De la série à la transformée de Fourier

Transformée de Fourier de signaux d'énergie finie

Propriétés

Signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

Spectre de raies

À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

Peigne de Dirac

Quelques exemples de spectres

Transformée de Fourier et convolution

Lien entre transformations

Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

Dualité convolution - multiplication

$$(x \star y)(t) \Rightarrow X(f)Y(f)$$

$$x(t)y(t) \Rightarrow (X \star Y)(f)$$

Exercices :

1. interpréter dans le domaine de Fourier l'effet d'un filtre $h(t)$ rectangulaire de durée T sur un signal sinusoïdal de période T_0 (remarque : en TP ce filtre a été simulé en temps discret)
2. compléter votre cours en étudiant les autres propriétés de la transformée de Fourier (symétrie hermitienne, signal réel, translation temporelle $x(t - \tau)$, translation en fréquence $X(f - f_1)$, ...) via vos sources bibliographiques

Conservation du produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$$

Énergie

L'énergie peut se calculer, soit dans le domaine temporel soit dans le domaine spectral, par l'identité de Plancherel-Parseval qui se déduit de la conservation du produit scalaire

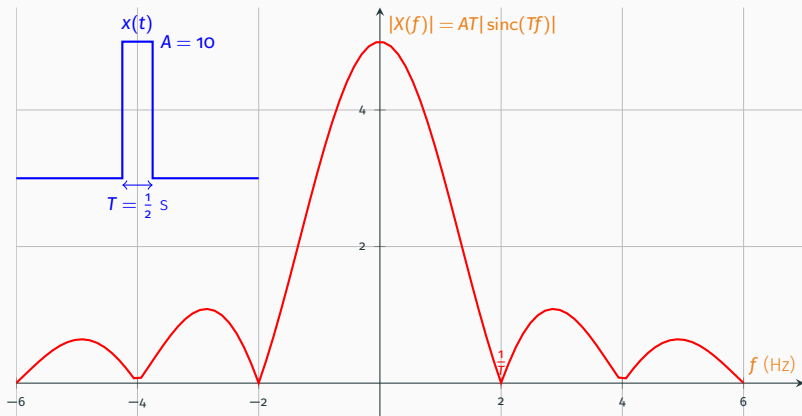
$$E_x = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ représente la densité spectrale d'énergie.

Exercice : Calculer l'énergie du signal dont la TF est donnée par

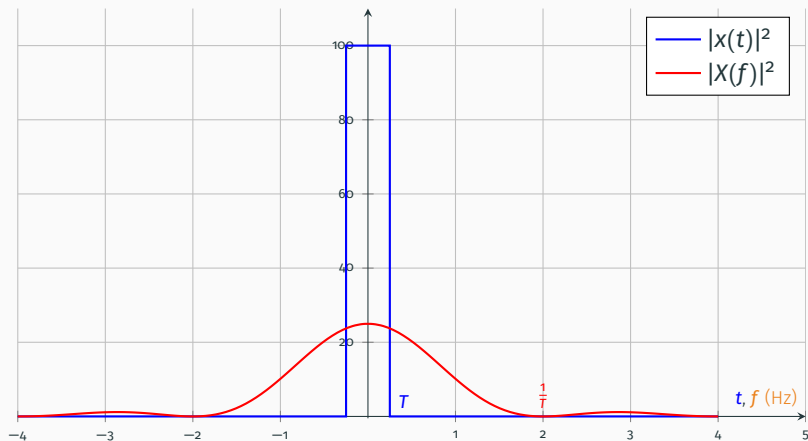
$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(Tf)$$

Densité spectrale d'énergie vs énergie



Module de la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire

Densité spectrale d'énergie vs énergie



Densité spectrale d'énergie d'un signal rectangulaire

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = ?$$

Transformée de Fourier

De la série à la transformée de Fourier

Transformée de Fourier de signaux d'énergie finie

Propriétés

Signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

Spectre de raies

À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

Peigne de Dirac

Quelques exemples de spectres

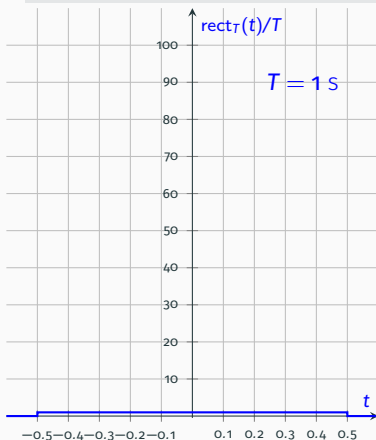
Transformée de Fourier et convolution

Lien entre transformations

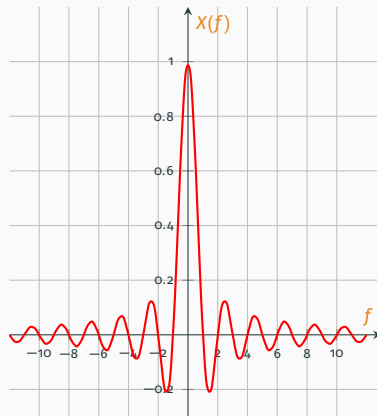
Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

- l'impulsion $\delta(t)$ peut être vue comme la limite quand $T \rightarrow 0$ de $\frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$

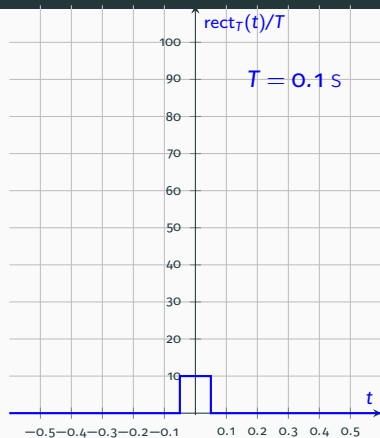


$$x(t) = \text{rect}_T(t)/T$$

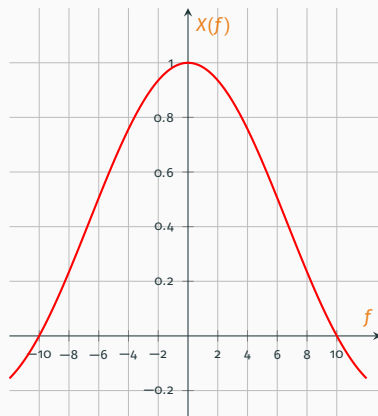


$$X(f) = \text{sinc}(Tf)$$

Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

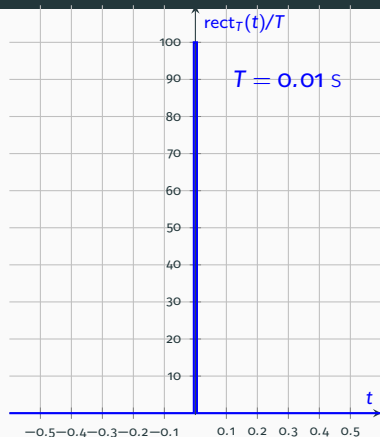


$$x(t) = \text{rect}_T(t)/T$$

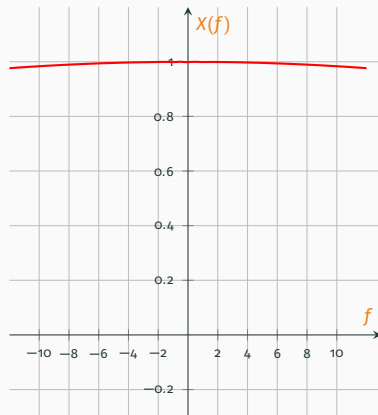


$$X(f) = \text{sinc}(Tf)$$

Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie



$$x(t) = \text{rect}_T(t)/T$$

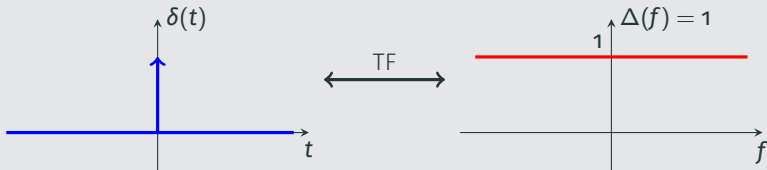


$$X(f) = \text{sinc}(Tf)$$

Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

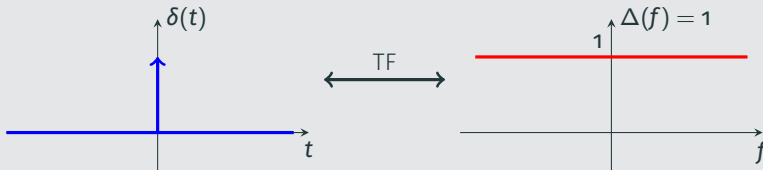
- l'impulsion $\delta(t)$ peut être vue comme la limite quand $T \rightarrow 0$ de $\frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$
- sa TF $\Delta(f) = \text{sinc}(Tf)$ tend vers 1 pour toutes les valeurs de f (signal constant) quand $T \rightarrow 0$



Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

- l'impulsion $\delta(t)$ peut être vue comme la limite quand $T \rightarrow 0$ de $\frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$
- sa TF $\Delta(f) = \text{sinc}(Tf)$ tend vers 1 pour toutes les valeurs de f (signal constant) quand $T \rightarrow 0$

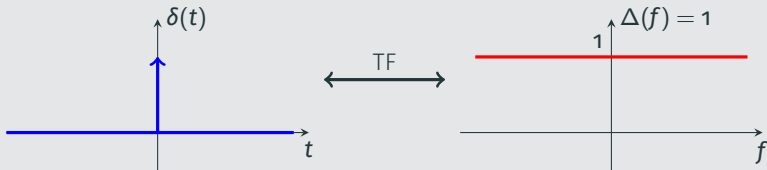


- L'énergie de l'impulsion de Dirac peut être calculée à partir de la densité spectrale d'énergie $|\Delta(f)|^2$ et elle est donc infinie

Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

- l'impulsion $\delta(t)$ peut être vue comme la limite quand $T \rightarrow 0$ de $\frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$
- sa TF $\Delta(f) = \text{sinc}(Tf)$ tend vers 1 pour toutes les valeurs de f (signal constant) quand $T \rightarrow 0$



- L'énergie de l'impulsion de Dirac peut être calculée à partir de la densité spectrale d'énergie $|\Delta(f)|^2$ et elle est donc infinie

Signal constant $x(t) = A$

Par dualité de la relation précédente on obtient un spectre proportionnel à une impulsion de Dirac à la fréquence nulle $X(f) = A\delta(f)$

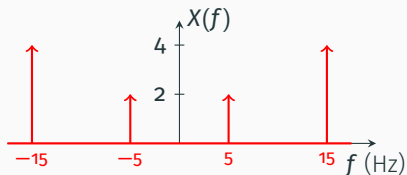
Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie (2)

Signaux périodiques : spectre de raies

La transformée de Fourier d'un signal périodique de période T_0 est une somme d'impulsions de Dirac espacées de $f_0 = 1/T_0$ dont les coefficients sont égaux aux coefficients de la série de Fourier (TF au sens des distributions)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - nf_0) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - nf_0) \right] e^{j2\pi ft} df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$



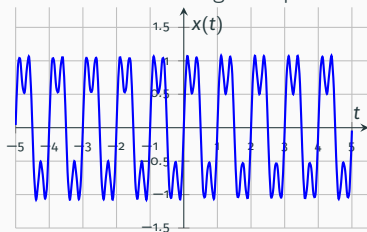
Spectre de raie

$$X(f) = 4\delta(f - 3f_0) + 2\delta(f - f_0) + 2\delta(f + f_0) + 4\delta(f + 3f_0)$$

Exercice : calculer $x(t)$

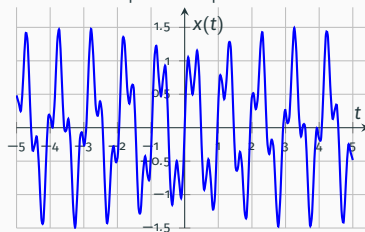
À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

1. Tous les signaux périodiques sont caractérisés par un spectre de raies
2. **Attention**, l'inverse n'est pas vraie : un spectre de raies n'est pas forcément la signature d'un signal périodique (si celles ci ne sont pas des multiples d'une fréquence fondamentale)
3. La somme de deux signaux périodiques est-elle périodique ?



$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi 3t)$$

vs



$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi^2 t)$$

4. Lorsque le signal résultant est périodique comment peut-on déterminer sa période (sans disposer de son graphe temporel) ?

Peigne de Dirac

Train périodique d'impulsions unités en TC utile pour définir mathématiquement l'opération d'échantillonnage. Sa période sera donc notée T_e .

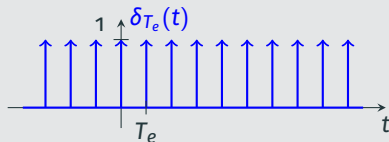
Peigne de Dirac

Train périodique d'impulsions unités en TC utile pour définir mathématiquement l'opération d'échantillonnage. Sa période sera donc notée T_e .

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

Peigne de Dirac

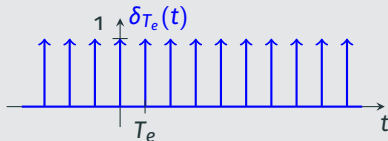
$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$



Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

Peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

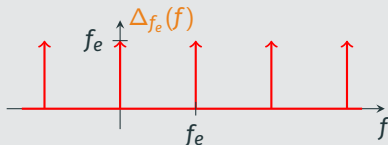


Transformée de Fourier du peigne de Dirac

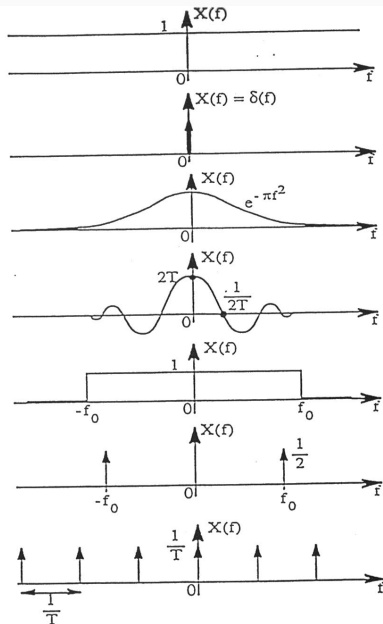
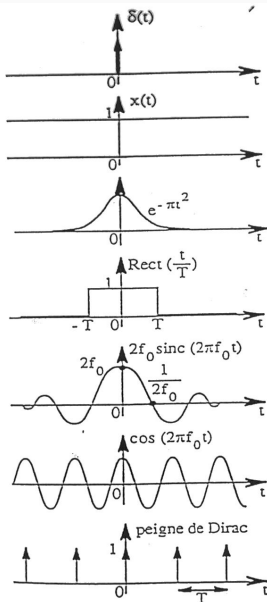
Rappel : la TF d'un signal périodique de période T_e est une somme d'impulsions de Dirac espacées de f_e

$$\Delta_{f_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - nf_e) \quad X_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi n f_e t} dt = \frac{1}{T_e} = f_e$$

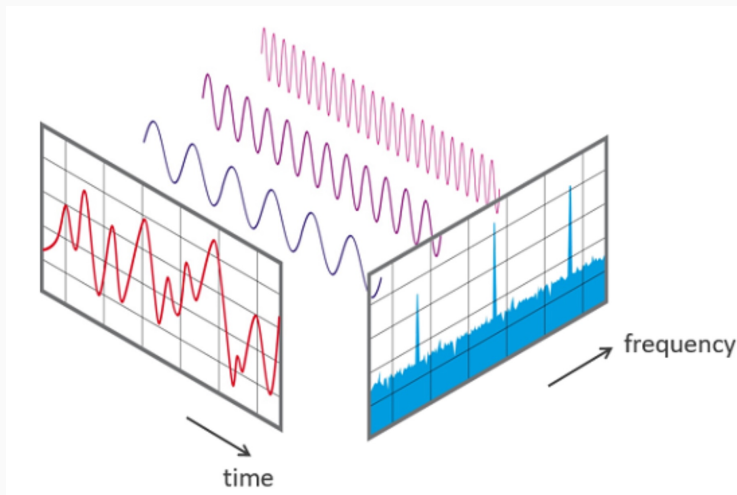
$$\Delta_{f_e}(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$



Quelques exemples de spectres



Le double point de vue : temps et fréquence



Transformée de Fourier

De la série à la transformée de Fourier

Transformée de Fourier de signaux d'énergie finie

Propriétés

Signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

Spectre de raies

À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

Peigne de Dirac

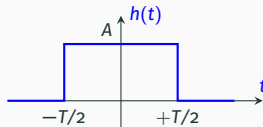
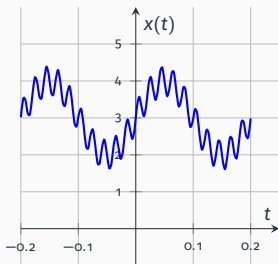
Quelques exemples de spectres

Transformée de Fourier et convolution

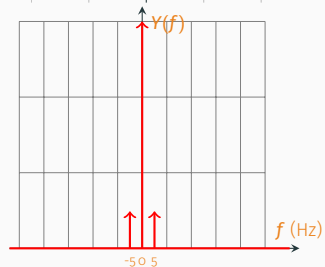
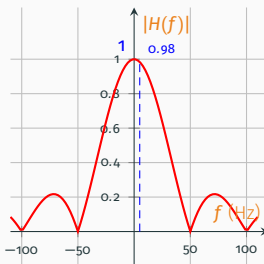
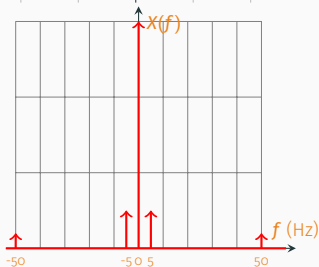
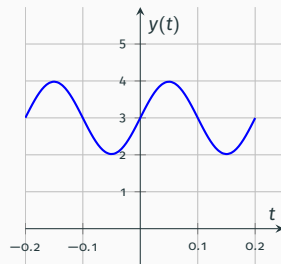
Lien entre transformations

Transformée de Fourier et convolution - filtre rectangulaire

$x(t) = \sin(2\pi 5t) + 0.4 \sin(2\pi 50t) + 3$, filtre moyennneur de largeur $T = 0.02$ s

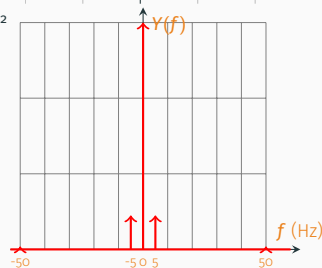
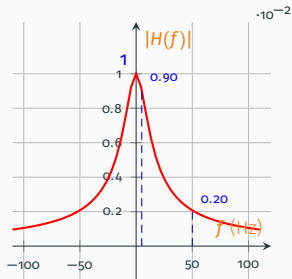
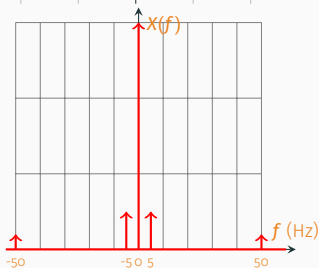
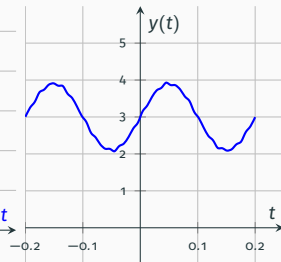
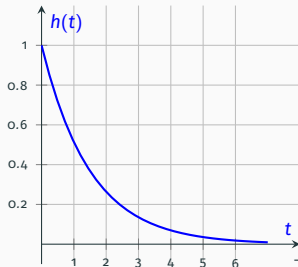
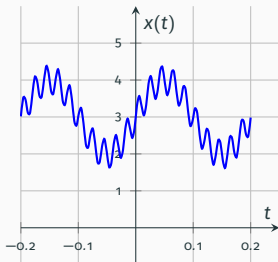


Réponse impulsionnelle



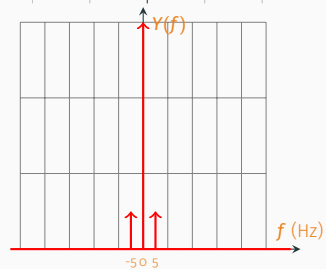
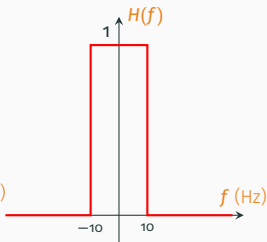
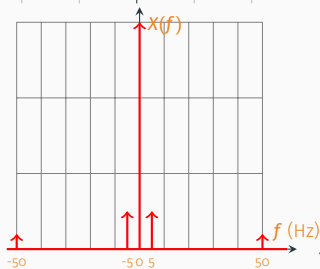
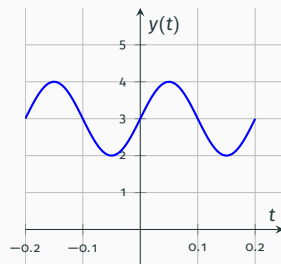
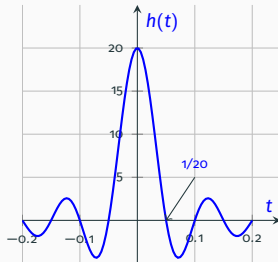
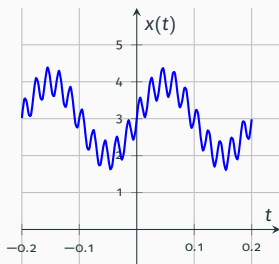
Transformée de Fourier et convolution - du 1^{er} ordre

$$x(t) = \sin(2\pi 5t) + 0.4 \sin(2\pi 50t) + 3, h(t) = e^{-t/T}, H(f) = \frac{1}{1+j2\pi fT}, T=0.015 \text{ s}$$



Transformée de Fourier et convolution - filtre idéal

$$x(t) = \sin(2\pi 5t) + 0.4 \sin(2\pi 50t) + 3, H(f) = \text{rect}_{20}(f)$$



Transformée de Fourier

De la série à la transformée de Fourier

Transformée de Fourier de signaux d'énergie finie

Propriétés

Signaux d'énergie infinie

Impulsion de Dirac

Spectre de raies

À propos des spectres de raies et des signaux périodiques

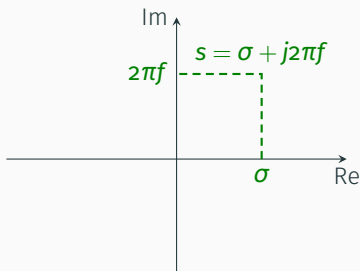
Peigne de Dirac

Quelques exemples de spectres

Transformée de Fourier et convolution

Lien entre transformations

Liens entre transformations : transformée de Laplace

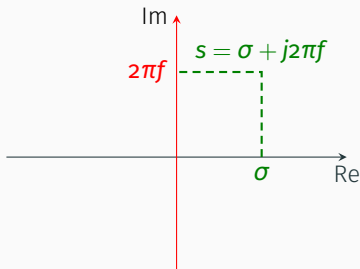


Plan complexe - variable de Laplace

Transformée de Laplace (bilatérale) de $h(t)$:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}dt$$

Liens entre transformations : transformée de Fourier



Plan complexe - variable de Fourier ($\sigma = 0$)

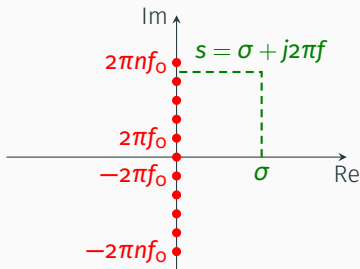
Transformée de Fourier de $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi f t} dt$$

Transformée de Laplace de $h(t)$ = Transformée de Fourier de $h(t)e^{-\sigma t}$:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt$$

Liens entre transformations : transformée de Fourier



Plan complexe - série de Fourier
(échantillonnage de l'axe des fréquences avec un pas = fréquence fondamentale f_0)

Série de Fourier de $h(t)$:

$$H[nf_0] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} h(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Transformée de Fourier de $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$