

Traitement du signal

Analyse de Fourier en temps continu 1/2

El-Hadi Djermoune

19 janvier 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L3 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Séries de Fourier

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

Série de Fourier de signaux à durée limitée

Série de Fourier de signaux périodiques

Représentations spectrales

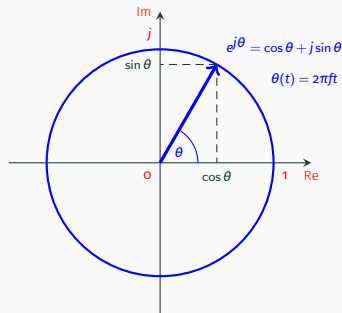
Formule d'Euler & combinaison linéaire d'exponentielles

- L'inversion de la formule d'Euler permet d'exprimer les fonctions trigonométriques comme une **combinaison linéaire d'exponentielles complexes**.

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Un signal sinusoïdal peut ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \right) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

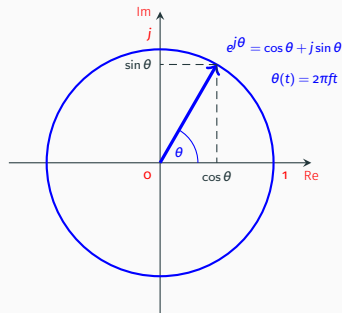
Formule d'Euler & combinaison linéaire d'exponentielles

- L'inversion de la formule d'Euler permet d'exprimer les fonctions trigonométriques comme une **combinaison linéaire d'exponentielles complexes**.

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Un signal sinusoïdal peut ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \right) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

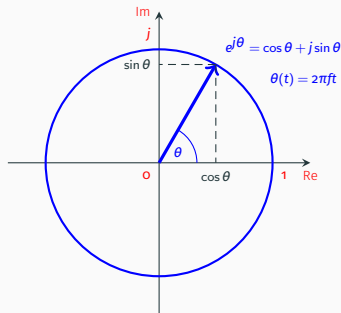
Formule d'Euler & combinaison linéaire d'exponentielles

- L'inversion de la formule d'Euler permet d'exprimer les fonctions trigonométriques comme une **combinaison linéaire d'exponentielles complexes**.

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



- Un signal sinusoïdal peut ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)} \right) \\ &= \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

- un exemple pour démarrer

- L'exemple précédent

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t}$$

fait apparaître deux éléments de la base des signaux exponentiels complexes qui constitue le fondement de l'analyse de Fourier.

Insérer la figure...

- Cette base est constituée des signaux définis par

$$\psi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$

- ce qui, pour l'exemple, donne :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \psi_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \psi_{-1}(t)$$

- les coordonnées, notées X_n dans la base de Fourier, sont alors simplement données par :

$$\alpha_1 = \frac{A}{2} e^{j\phi} = X_1, \quad \alpha_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} = X_{-1}$$

Ces coordonnées sont des nombres complexes.

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

- un exemple pour démarrer

- L'exemple précédent

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t}$$

fait apparaître deux éléments de la base des signaux exponentiels complexes qui constitue le fondement de l'analyse de Fourier.

- Cette base est constituée des signaux définis par

$$\psi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$

- ce qui, pour l'exemple, donne :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \psi_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \psi_{-1}(t)$$

- les coordonnées, notées X_n dans la base de Fourier, sont alors simplement données par :

$$\alpha_1 = \frac{A}{2} e^{j\phi} = X_1, \quad \alpha_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} = X_{-1}$$

Ces coordonnées sont des nombres complexes.

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

- un exemple pour démarrer

- L'exemple précédent

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi f_0 t}$$

fait apparaître deux éléments de la base des signaux exponentiels complexes qui constitue le fondement de l'analyse de Fourier.

- Cette base est constituée des signaux définis par

$$\psi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$

- ce qui, pour l'exemple, donne :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \psi_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \psi_{-1}(t)$$

- les coordonnées, notées X_n dans la base de Fourier, sont alors simplement données par :

$$\alpha_1 = \frac{A}{2} e^{j\phi} = X_1, \quad \alpha_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} = X_{-1}$$

Ces coordonnées sont des nombres complexes.

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

- un exemple pour démarrer

- L'exemple précédent

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{2\pi j f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-2\pi j f_0 t}$$

fait apparaître deux éléments de la base des signaux exponentiels complexes qui constitue le fondement de l'analyse de Fourier.

- Cette base est constituée des signaux définis par

$$\psi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$

- ce qui, pour l'exemple, donne :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \psi_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \psi_{-1}(t)$$

- les coordonnées, notées X_n dans la base de Fourier, sont alors simplement données par :

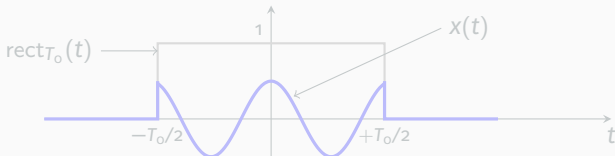
$$\alpha_1 = \frac{A}{2} e^{j\phi} = X_1, \quad \alpha_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} = X_{-1}$$

Ces coordonnées sont des nombres complexes.

Série de Fourier de signaux à *durée limitée*

L'exemple précédent se généralise par

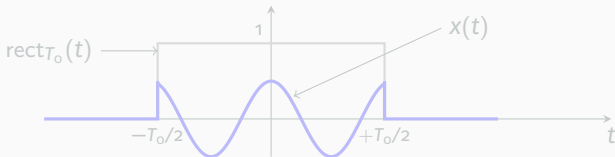
- le développement en *série de Fourier* qui est utilisable pour :
 - les signaux à **durée limitée** d'énergie finie
 - les signaux **périodiques**
- **Rappel** : un signal à temps continu $x(t)$ est à **durée limitée** T_0 si il satisfait la condition $x(t) = x(t) \text{rect}_{T_0}(t)$.



Série de Fourier de signaux à *durée limitée*

L'exemple précédent se généralise par

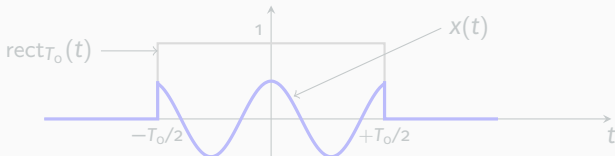
- le développement en *série de Fourier* qui est utilisable pour :
 - les signaux à **durée limitée** d'énergie finie
 - les signaux **périodiques**
- **Rappel** : un signal à temps continu $x(t)$ est à **durée limitée** T_0 si il satisfait la condition $x(t) = x(t) \text{rect}_{T_0}(t)$.



Série de Fourier de signaux à *durée limitée*

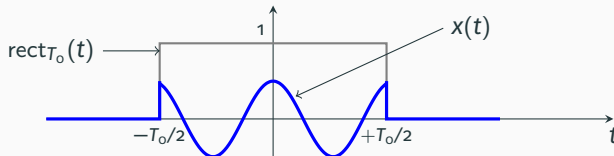
L'exemple précédent se généralise par

- le développement en *série de Fourier* qui est utilisable pour :
 - les signaux à **durée limitée** d'énergie finie
 - les signaux **périodiques**
- **Rappel** : un signal à temps continu $x(t)$ est à **durée limitée** T_0 si il satisfait la condition $x(t) = x(t) \text{rect}_{T_0}(t)$.



L'exemple précédent se généralise par

- le développement en *série de Fourier* qui est utilisable pour :
 - les signaux à **durée limitée** d'énergie finie
 - les signaux **périodiques**
- **Rappel :** un signal à temps continu $x(t)$ est à **durée limitée** T_0 si il satisfait la condition $x(t) = x(t) \text{rect}_{T_0}(t)$.



Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Série de Fourier : une base orthogonale de $L^2(T_0)$

- Tout signal de **durée limitée** T_0 et d'énergie finie (i.e. $L^2(T_0)$) peut se décomposer selon la formule de **synthèse** suivante :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \psi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- les fonctions $\psi_n(t)$ constituent une base orthogonale de $L^2(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi m f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\ &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(n-m)f_0 t) dt + j \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(2\pi(n-m)f_0 t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m \\ T_0 & \text{pour } n = m \end{cases} = T_0 \delta[n-m]. \end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_0}(t) + X_1 \text{rect}_{T_0}(t) (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_0}(t) + X_1 \text{rect}_{T_0}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \text{rect}_{T_0}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_0 t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_0}(t) + X_1 \text{rect}_{T_0}(t) (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_0}(t) + X_1 \text{rect}_{T_0}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \text{rect}_{T_0}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_0 t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) (e^{-j2\pi f_o t} + e^{j2\pi f_o t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_o t) \\ &= \text{rect}_{T_o}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_o t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) (e^{-j2\pi f_o t} + e^{j2\pi f_o t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_o t) \\ &= \text{rect}_{T_o}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_o t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) (e^{-j2\pi f_o t} + e^{j2\pi f_o t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_o t) \\ &= \text{rect}_{T_o}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_o t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) (e^{-j2\pi f_o t} + e^{j2\pi f_o t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_o t) \\ &= \text{rect}_{T_o}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_o t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

- La formule de synthèse comprend une infinité de termes
- Une approximation $\hat{x}_N(t)$ de cette formule est donnée par la série tronquée comprenant $2N + 1$ termes

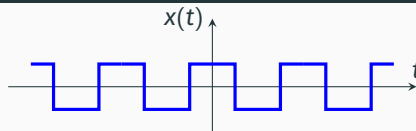
$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t}$$

- **Exemple :** expression de $\hat{x}_1(t)$ sous l'hypothèse $X_1 = X_{-1}$

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(t) &= \sum_{n=-1}^1 X_n \text{rect}_{T_o}(t) e^{j2\pi n f_o t} \\ &= X_{-1} \psi_{-1}(t) + X_0 \psi_0(t) + X_1 \psi_1(t) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) (e^{-j2\pi f_o t} + e^{j2\pi f_o t}) \\ &= X_0 \text{rect}_{T_o}(t) + X_1 \text{rect}_{T_o}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_o t) \\ &= \text{rect}_{T_o}(t) (X_0 + 2X_1 \cos(2\pi f_o t))\end{aligned}$$

Synthèse de Fourier : exemple

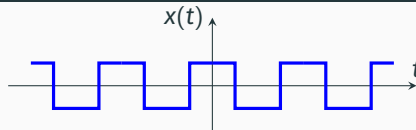
- Signal rectangulaire pair
 2π -périodique



$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$

Synthèse de Fourier : exemple

- Signal rectangulaire pair
 2π -périodique



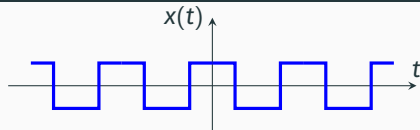
- Coordonnées dans la base de Fourier

$$X_n = \frac{2(1 - \cos(\frac{n\pi}{2})) \sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$$

$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$

Synthèse de Fourier : exemple

- Signal rectangulaire pair
 2π -périodique

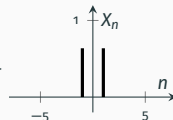
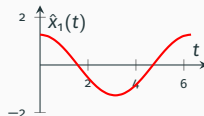
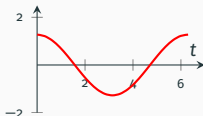
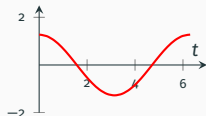


- Coordonnées dans la base de Fourier

$$X_n = \frac{2(1 - \cos(\frac{n\pi}{2})) \sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$$

- Synthèse : visualisation
 - de la composante continue, $X_0 = 0$
 - du **fondamental**, $X_{\pm 1} = 0.637$

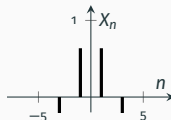
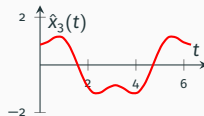
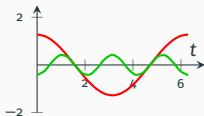
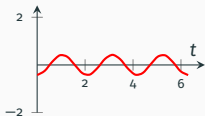
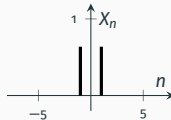
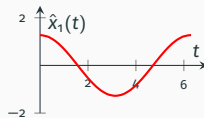
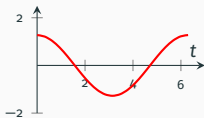
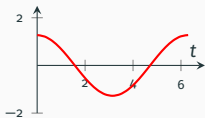
$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$



Synthèse de Fourier : exemple

- Synthèse : visualisation
 - de la composante continue, $X_0 = 0$
 - du **fondamental**, $X_{\pm 1} = 0.637$
 - de l'**harmonique** de rang 3, $X_{\pm 3} = 0.212$
l'harmonique de rang n est une fonction sinusoïdale de fréquence nf_0

$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$

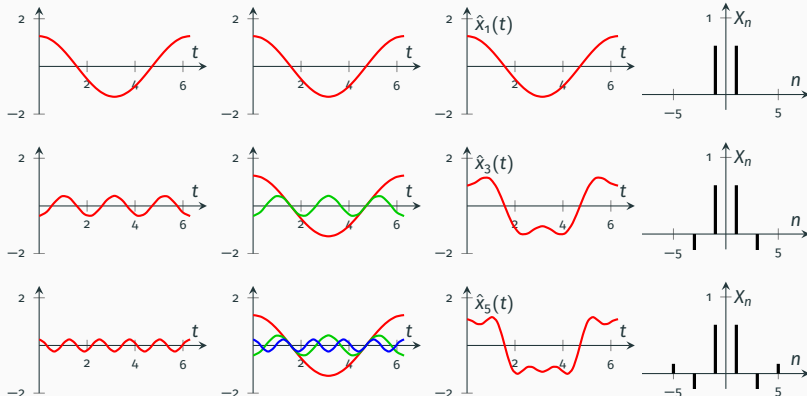


Synthèse de Fourier : exemple

- Synthèse : visualisation

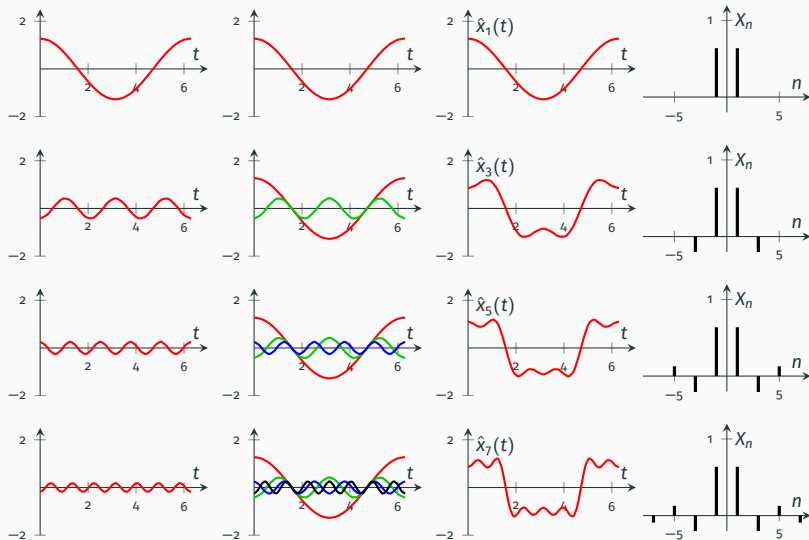
- de la composante continue, $X_0 = 0$
- du **fondamental**, $X_{\pm 1} = 0.637$
- de l'**harmonique** de rang 3, $X_{\pm 3} = 0.212$
- l'harmonique de rang n est une fonction sinusoïdale de fréquence nf_0

$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$



Synthèse de Fourier : exemple

$$X_0 = 0, \quad X_{\pm 1} \approx 0.637, \quad X_{\pm 3} \approx -0.212, \quad X_{\pm 5} \approx 0.127, \quad X_{\pm 7} \approx -0.091$$



Jean Baptiste Joseph Fourier

- mathématicien et physicien français (1768-1830), a aussi été Préfet de l'Isère sous Napoléon
- le premier scientifique à appliquer l'analyse mathématique à la physique (diffusion de la chaleur)
- le premier à comprendre de manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques
- une théorie d'application universelle : chaleur, vibrations, acoustique, électricité, ...
- une théorie fondatrice du traitement du signal et des images (pas d'IRM ou de 4G sans Fourier)



Série de Fourier de signaux à *durée limitée* - Analyse

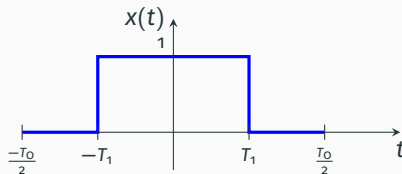
Les *coefficients de Fourier* X_n s'obtiennent en appliquant les produits scalaires entre le signal $x(t)$ et les signaux de base $\psi_n(t)$:

$$\begin{aligned}\langle x, \psi_n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \text{rect}_{T_0}(t) dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\&= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m e^{j2\pi m f_0 t} \right) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(m-n)f_0 t} dt \\&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m T_0 \delta[m-n] = X_n T_0\end{aligned}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Formule d'analyse

Calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle



$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\ &= \dots = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1) \end{aligned}$$

Exercice : démontrer le résultat.

Sinus cardinal : définition

- La terminologie sinus cardinal a été introduite en 1952 par Philip Woodward : « *occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own* ».

Sinus cardinal : définition

- La terminologie sinus cardinal a été introduite en 1952 par Philip Woodward : « *occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own* ».
- Attention la fonction sinus cardinal admet deux définitions

Sinus cardinal : définition

- La terminologie sinus cardinal a été introduite en 1952 par Philip Woodward : « *occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own* ».
- Attention la fonction sinus cardinal admet deux définitions
 1. définition usuelle en traitement du signal, retenue pour ce cours, parfois appelé sinus cardinal normalisé, **programmé ainsi dans Matlab** :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

Sinus cardinal : définition

- La terminologie sinus cardinal a été introduite en 1952 par Philip Woodward : « *occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own* ».
- Attention la fonction sinus cardinal admet deux définitions
 1. définition usuelle en traitement du signal, retenue pour ce cours, parfois appelé sinus cardinal normalisé, **programmé ainsi dans Matlab** :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

2. définition utilisée en mathématique :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

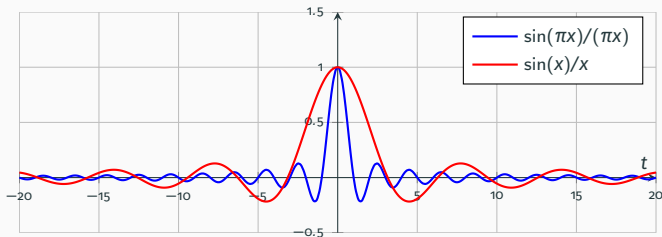
Sinus cardinal : définition

- La terminologie sinus cardinal a été introduite en 1952 par Philip Woodward : « occurs so often in Fourier analysis and its applications that it does seem to merit some notation of its own ».
- Attention la fonction sinus cardinal admet deux définitions
 - définition usuelle en traitement du signal, retenue pour ce cours, parfois appelé sinus cardinal normalisé, **programmé ainsi dans Matlab** :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$

- définition utilisée en mathématique :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \text{sinc}(0) = 1$$



Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

		Temps continu	Temps discret
Séries	à durée limitée	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] \text{rect}_{T_0} e^{j2\pi n f_0 t}$ $X[n] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$	$x[k]$ $X[n]$
	à périodiques	$x(t)$ $X[n]$	$x[k]$ $X[n]$
Transformées	à énergie finie	$x(t)$	$x(kT_e)$
	à énergie finie	$X(f)$	$X(f)$
	à puissance moy. finie	$x(t)$	$x(kT_e)$
	à puissance moy. finie	$X(f)$	$X(f)$

Séries de Fourier

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

Série de Fourier de signaux à durée limitée

Série de Fourier de signaux périodiques

Représentations spectrales

Série de Fourier de signaux *périodiques*

- On sait que tout signal $x(t)$ à support limité de durée $T_0 = 1/f_0$ admet la représentation :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}$$

- Si le signal $x(t)$ n'est pas à support limité, que vaut l'expression :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{j2\pi n f_0 t} = ?$$

Série de Fourier de signaux *périodiques*

- On sait que tout signal $x(t)$ à support limité de durée $T_0 = 1/f_0$ admet la représentation :

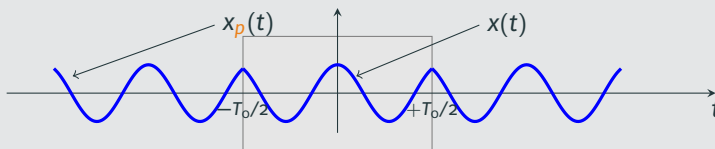
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] \text{rect}_{T_0}(t) e^{j2\pi n f_0 t}$$

- Si le signal $x(t)$ n'est pas à support limité, que vaut l'expression :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{j2\pi n f_0 t} = ?$$

Comportement hors du support T_0

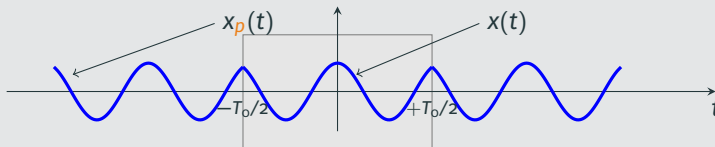
La série de Fourier d'un signal $x(t)$ à durée limitée converge à l'extérieur du support T_0 vers un signal périodisé $x_p(t)$.



Série de Fourier de signaux *périodiques*

Comportement hors du support T_0

La série de Fourier d'un signal $x(t)$ à durée limitée converge à l'extérieur du support T_0 vers un signal périodisé $x_p(t)$.



Série de Fourier : formules d'analyse et de synthèse

Un signal $x_p(t)$ périodique de période T_0 : $x_p(t) = x_p(t + mT_0)$ d'énergie infinie et de puissance moyenne finie P_x admet un développement en série de Fourier :

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{Formule de synthèse}$$

$$X[n] = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad \text{Formule d'analyse}$$

Séries de Fourier

Décomposition d'un signal sur une base de signaux exponentiels complexes

Série de Fourier de signaux à durée limitée

Série de Fourier de signaux périodiques

Représentations spectrales

Représentations spectrales : un support à l'analyse

- Une représentation spectrale consiste à représenter les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence.

Représentations spectrales : un support à l'analyse

- Une représentation spectrale consiste à représenter les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence.
- Les coefficients de Fourier étant généralement des nombres complexes, il est illusoire d'utiliser une représentation 3D ($f_n = n f_0$, $\mathcal{R}(X[n])$, $\mathcal{I}(X[n])$) :

Représentations spectrales : un support à l'analyse

- Une représentation spectrale consiste à représenter les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence.
- Les coefficients de Fourier étant généralement des nombres complexes, il est illusoire d'utiliser une représentation 3D ($f_n = nf_0, \mathcal{R}(X[n]), \mathcal{I}(X[n])$) :
 - une première possibilité consiste à représenter séparément partie réelle ($f_n = nf_0, \mathcal{R}(X[n])$) et partie imaginaire ($f_n = nf_0, \mathcal{I}(X[n])$);

Représentations spectrales : un support à l'analyse

- Une représentation spectrale consiste à représenter les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence.
- Les coefficients de Fourier étant généralement des nombres complexes, il est illusoire d'utiliser une représentation 3D ($f_n = nf_0$, $\mathcal{R}(X[n])$, $\mathcal{I}(X[n])$) :
 - une première possibilité consiste à représenter séparément partie réelle ($f_n = nf_0$, $\mathcal{R}(X[n])$) et partie imaginaire ($f_n = nf_0$, $\mathcal{I}(X[n])$);
 - une seconde possibilité, plus classique, consiste à représenter séparément l'évolution du module ($f_n = nf_0$, $|X[n]|$) - **spectre d'amplitude** - et de l'argument ou angle ($f_n = nf_0$, $\angle X[n]$) - **spectre de phase** - en fonction de la fréquence.

Représentations spectrales : un support à l'analyse

- Une représentation spectrale consiste à représenter les coefficients de Fourier en fonction de la fréquence.
- Les coefficients de Fourier étant généralement des nombres complexes, il est illusoire d'utiliser une représentation 3D ($f_n = nf_0$, $\mathcal{R}(X[n])$, $\mathcal{I}(X[n])$) :
 - une première possibilité consiste à représenter séparément partie réelle ($f_n = nf_0$, $\mathcal{R}(X[n])$) et partie imaginaire ($f_n = nf_0$, $\mathcal{I}(X[n])$);
 - une seconde possibilité, plus classique, consiste à représenter séparément l'évolution du module ($f_n = nf_0$, $|X[n]|$) - **spectre d'amplitude** - et de l'argument ou angle ($f_n = nf_0$, $\angle X[n]$) - **spectre de phase** - en fonction de la fréquence.

Exemple : Série de Fourier d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{j2\pi(-1)f_0 t} \quad (1)$$

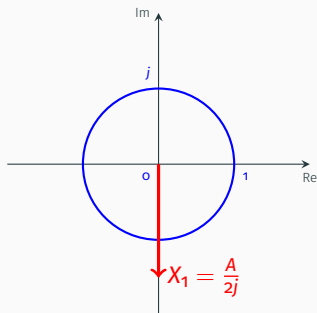
$$X_1 = \frac{A}{2j}, \quad X_{-1} = \frac{-A}{2j} \quad (2)$$

Représentations spectrales : un support à l'analyse

Exemple : Série de Fourier d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{j2\pi(-1)f_0 t} \quad (1)$$

$$X_1 = \frac{A}{2j}, \quad X_{-1} = \frac{-A}{2j} \quad (2)$$

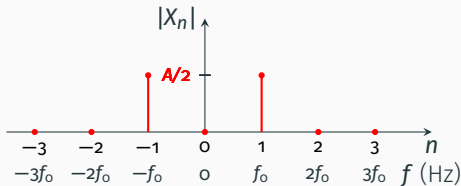


Représentations spectrales : un support à l'analyse

Exemple : Série de Fourier d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{j2\pi(-1)f_0 t} \quad (1)$$

$$X_1 = \frac{A}{2j}, \quad X_{-1} = \frac{-A}{2j} \quad (2)$$



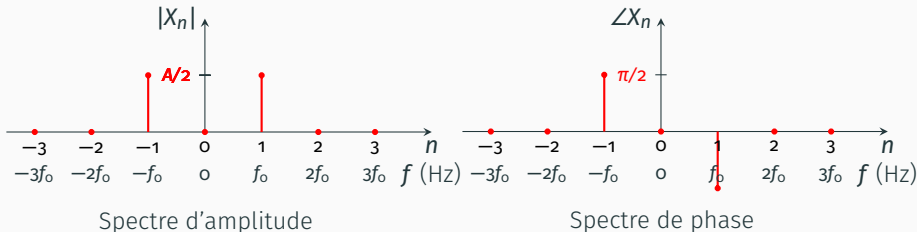
Spectre d'amplitude

Représentations spectrales : un support à l'analyse

Exemple : Série de Fourier d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{j2\pi(-1)f_0 t} \quad (1)$$

$$X_1 = \frac{A}{2j}, \quad X_{-1} = \frac{-A}{2j} \quad (2)$$

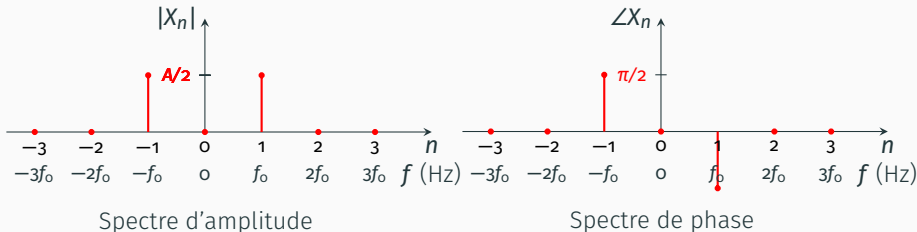


Représentations spectrales : un support à l'analyse

Exemple : Série de Fourier d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} e^{j2\pi(-1)f_0 t} \quad (1)$$

$$X_1 = \frac{A}{2j}, \quad X_{-1} = \frac{-A}{2j} \quad (2)$$



Exercice : Déterminer les spectres de $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ et $z(t) = -A \sin(2\pi f_0 t)$ pour $A > 0$.

Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

- Rappel : rectangle de longueur $2T_1$ observé sur une durée $T_0 > 2T_1$.
- Le calcul des coefficients de Fourier aboutit à la formule :

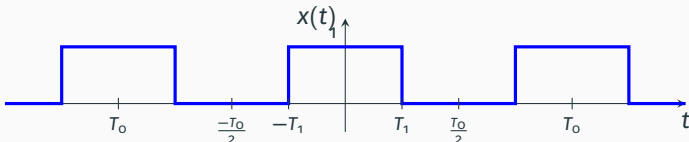
$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$

Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

- Rappel : rectangle de longueur $2T_1$ observé sur une durée $T_0 > 2T_1$.
- Le calcul des coefficients de Fourier aboutit à la formule :

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$

- Si l'on périodise le signal observé avec une période T_0 on obtient un créneau de rapport cyclique = durée état haut/période = $2T_1/T_0$.

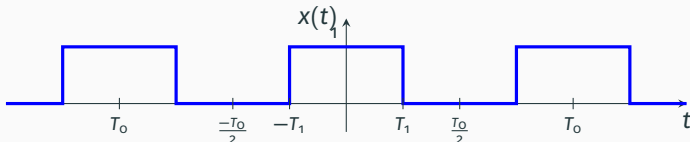


Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

- Rappel : rectangle de longueur $2T_1$ observé sur une durée $T_0 > 2T_1$.
- Le calcul des coefficients de Fourier aboutit à la formule :

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$

- Si l'on périodise le signal observé avec une période T_0 on obtient un créneau de rapport cyclique = durée état haut/période = $2T_1/T_0$.



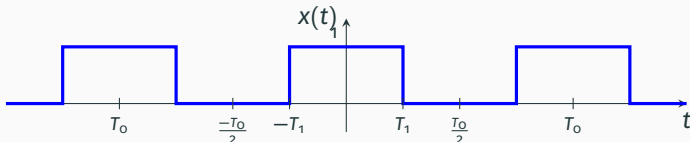
- Le signal créneau est périodique de période T_0 et aura les mêmes coefficients de Fourier X_n que le rectangle observé sur une durée T_0 .

Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

- Rappel : rectangle de longueur $2T_1$ observé sur une durée $T_0 > 2T_1$.
- Le calcul des coefficients de Fourier aboutit à la formule :

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$

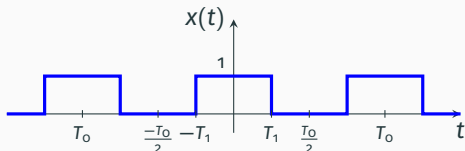
- Si l'on périodise le signal observé avec une période T_0 on obtient un créneau de rapport cyclique = durée état haut/période = $2T_1/T_0$.



- Le signal créneau est périodique de période T_0 et aura les mêmes coefficients de Fourier X_n que le rectangle observé sur une durée T_0 .
- **Illustration sonore** : écouter le son produit par un signal carré (rapport cyclique = 1/2) à l'adresse https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave.

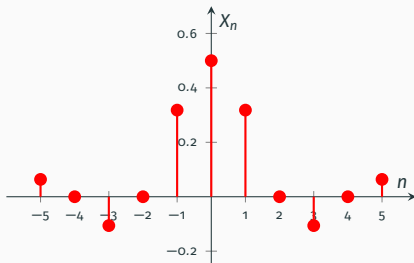
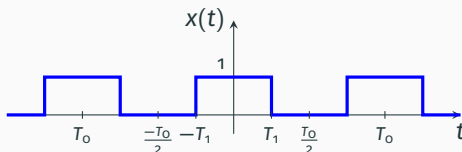
Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$



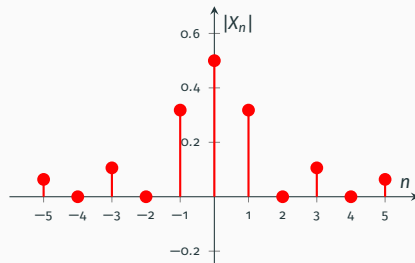
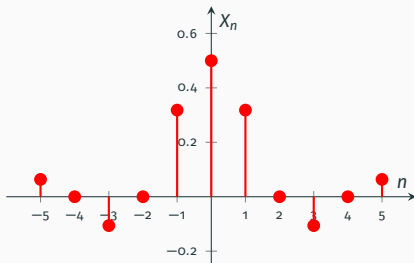
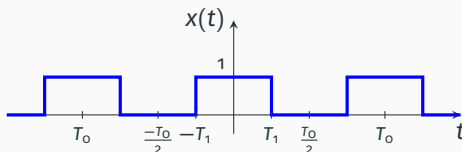
Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$



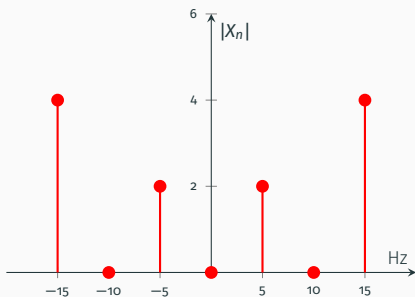
Retour sur le calcul des coefficients de Fourier pour un rectangle

$$X_n = 2f_0 T_1 \text{sinc}(2nf_0 T_1).$$

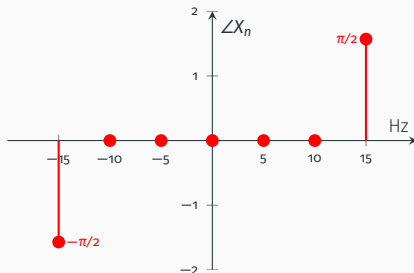


Représentations spectrales : exercice de synthèse de Fourier

Déterminer le signal $x(t)$ dont les spectres d'amplitude et de phase sont donnés par les figures suivantes.



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

Quels sont les signaux qui admettent une décomposition en série de Fourier ?

Convergence des séries de Fourier

- La réponse à cette question est apportée par la notion de convergence (il existe différents types de convergence).
- Les coefficients de Fourier doivent être finis.
- Convergence en norme 2 : la norme de l'écart $\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|_2^2$ doit tendre vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Quels sont les signaux qui admettent une décomposition en série de Fourier ?

Convergence des séries de Fourier

- La réponse à cette question est apportée par la notion de convergence (il existe différents types de convergence).
- Les coefficients de Fourier doivent être finis.
- Convergence en norme 2 : la norme de l'écart $\|x(t) - \hat{x}_N(t)\|_2^2$ doit tendre vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

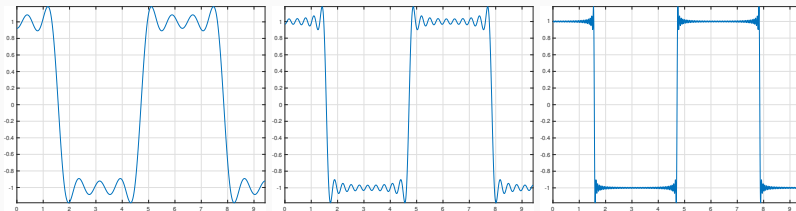
Conditions de convergence

- Les signaux TC à durée limitée T_0 d'énergie finie $x(t) \in L^2(T_0)$ admettent une décomposition en série de Fourier.
- Conditions de Dirichlet pour les signaux périodiques
 - $x(t) \in L^1(T_0)$
 - $x(t)$ doit comporter un nombre fini d'extrema sur une période
 - $x(t)$ ne doit comporter qu'un nombre fini de discontinuités, elles-mêmes finies, dans tout intervalle de temps fini

Phénomène de Gibbs

Le phénomène de Gibbs correspond au défaut d'approximation qui apparaît, lors de la synthèse de Fourier, aux bords des discontinuités des signaux dérivables seulement par morceaux (signal carré, signal triangulaire, ...).

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N x_n e^{j2\pi n f_0 t}$$



Synthèse de Fourier : approximations $\hat{x}_N(t)$ pour différentes valeurs de $N \in \{7, 20, 100\}$.