

Traitement du signal

Signaux et systèmes

El-Hadi Djermoune

26 janvier 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L3 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Signaux

Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

Energie et puissance moyenne d'un signal

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Signaux

Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

Energie et puissance moyenne d'un signal

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable $v : x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable $v : x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable v : $x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable v : $x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable $v : x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable $v : x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable v : $x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable v : $x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signal : définition et exemples

Exemple : différents types de signaux

- grandeur physique : température $T(t)$, pression $P(t)$, volume tumoral $V(t)$, ... fonction du temps ou d'une position $P(\text{altitude})$;
- intensité lumineuse d'une image $I(x, y)$;
- grandeur synthétique : suite de bits 11011000101;
- séries temporelles : indice boursier, ...

Définition

- un signal x est une fonction d'une variable v : $x = x(v)$;
- v représente généralement le temps t et est, dans ce cas, scalaire : $x(t)$
- v peut aussi être vectoriel (cas d'une image) : $I(x, y)$
- x peut éventuellement être vectoriel (cas du vecteur d'une image couleur RVB) : $[I_r(x, y), I_g(x, y), I_b(x, y)]$
- x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Signaux : temps continu - temps discret

On s'intéresse par la suite essentiellement à des signaux fonctions du temps.

Signal à *temps continu* (TC) $x(t)$

l'axe des temps est continu si c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un signal TC peut être :

- réel, par exemple : $x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$
- ou complexe : $x(t) = A(\cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)) = Ae^{j2\pi ft}$

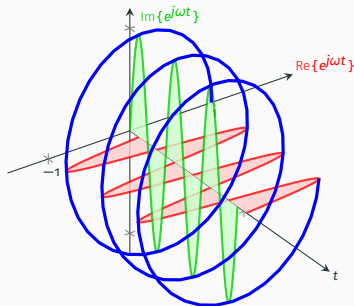
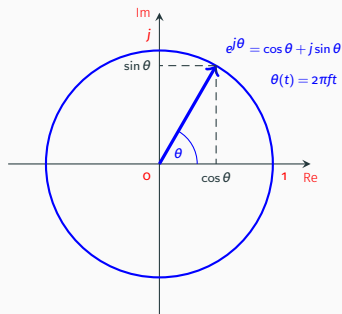
Signaux : temps continu - temps discret

On s'intéresse par la suite essentiellement à des signaux fonctions du temps.

Signal à *temps continu* (TC) $x(t)$

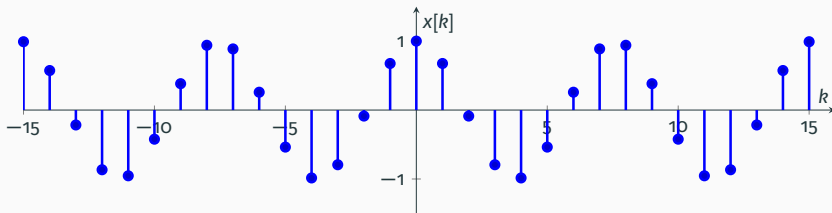
l'axe des temps est continu si c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un signal TC peut être :

- réel, par exemple : $x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$
- ou complexe : $x(t) = A(\cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)) = Ae^{j2\pi ft}$



Signaux : temps continu - temps discret

On s'intéresse par la suite essentiellement à des signaux fonctions du temps.



Signal à temps discret (TD) $x[k]$ ou x_k

l'axe des temps est discret si c'est un ensemble fini ou dénombrable d'instants inclus dans $\mathbb{R}$ (il s'agit souvent de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).

Exemple :

$$x_1[k] = 0.9^k, \quad x_2[k] = \cos(2\pi f k T_e) = \cos(2\pi \frac{f}{f_e} k) = \cos(2\pi f_t k)$$

Exercice : représenter $x_1[k]$ pour k variant de -1 à 2 .

Signaux

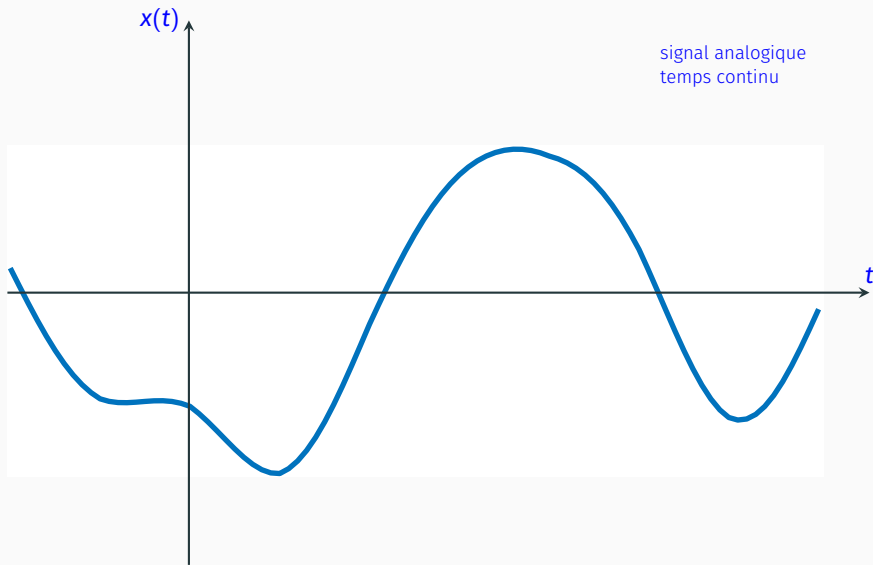
Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

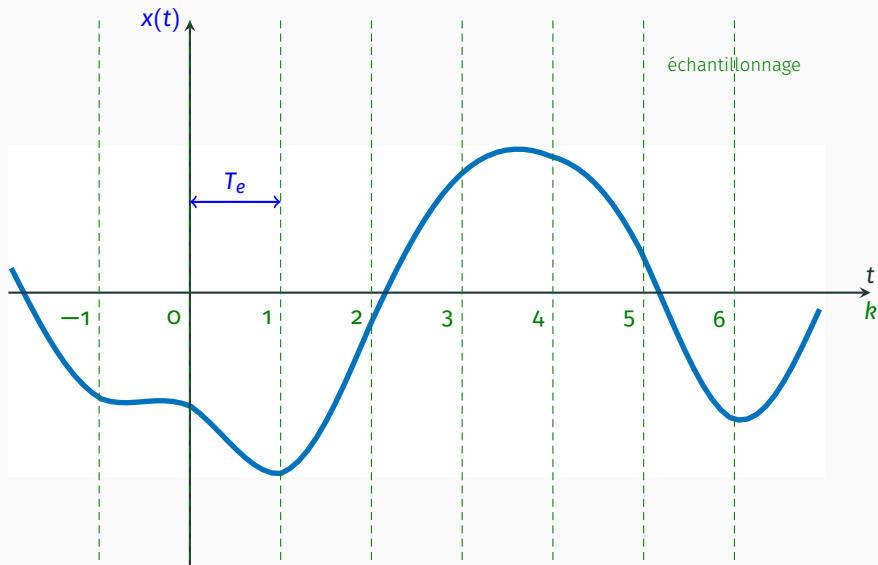
Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

Energie et puissance moyenne d'un signal

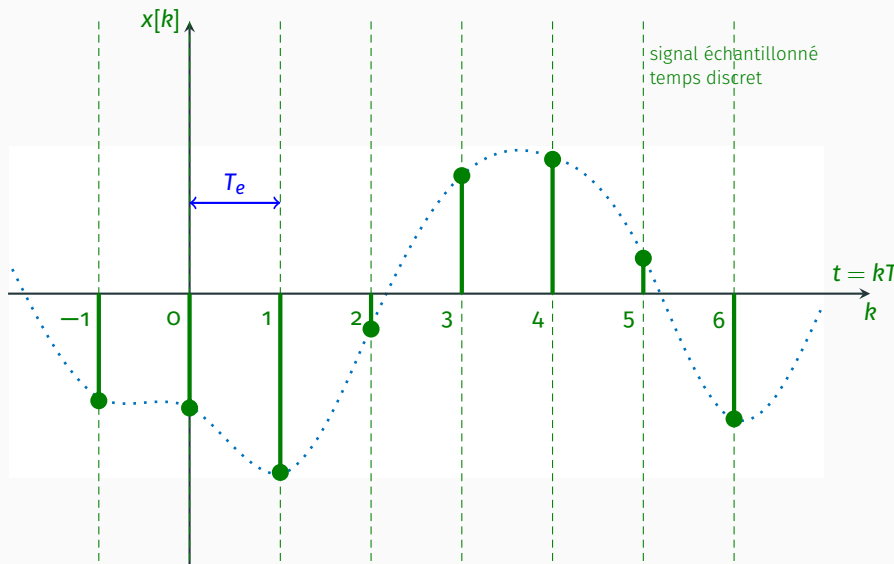
Signaux : de l'analogique au numérique



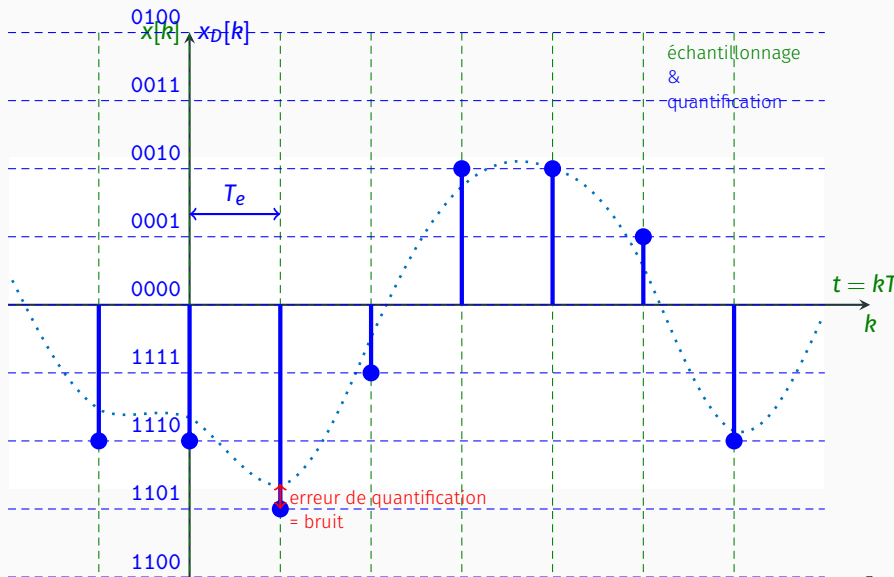
Signaux : de l'analogique au numérique



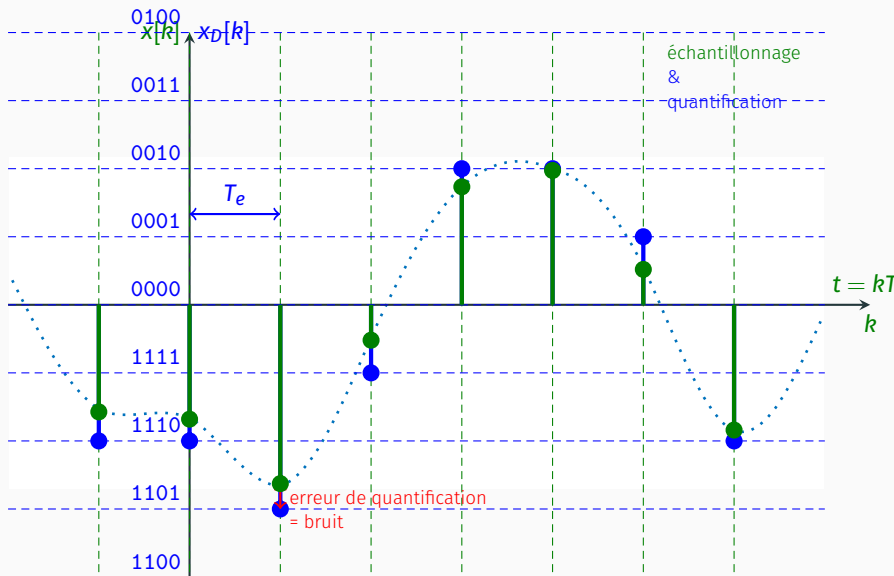
Signaux : de l'analogique au numérique



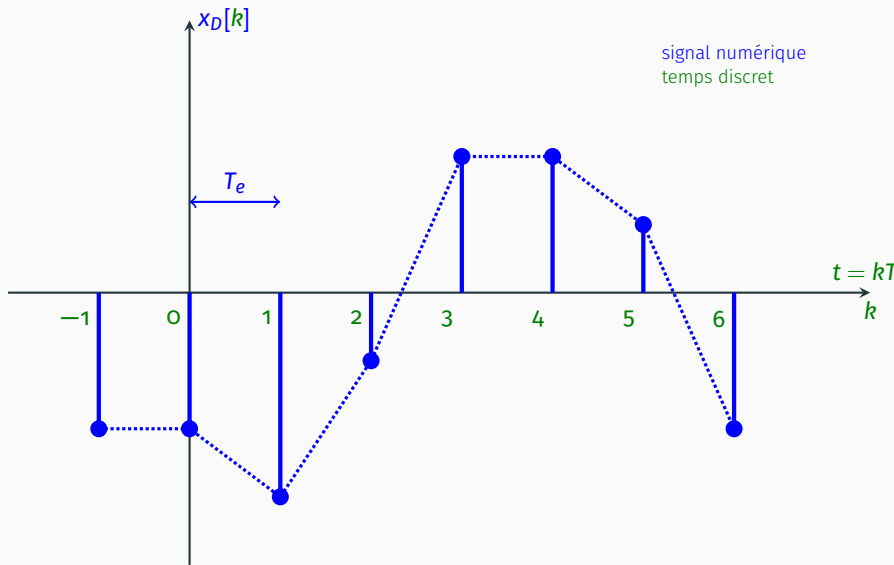
Signaux : de l'analogique au numérique



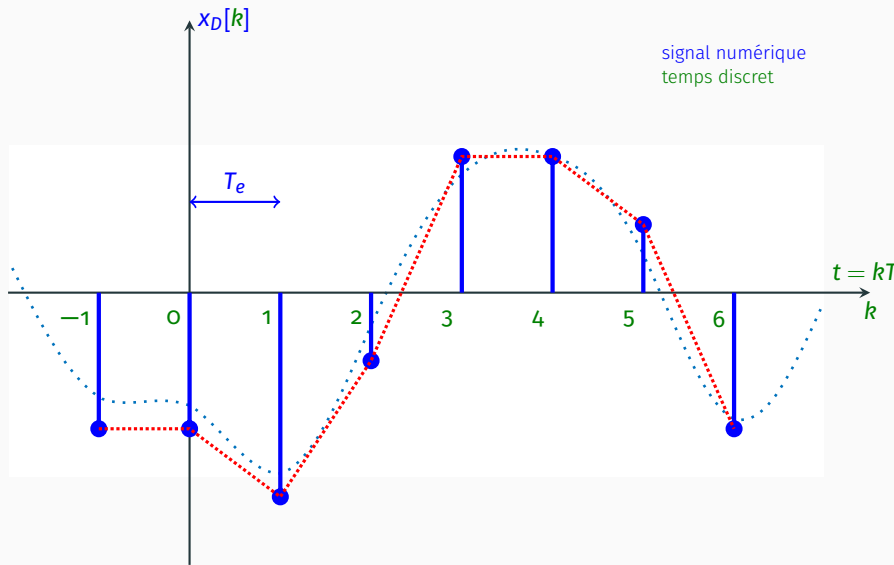
Signaux : de l'analogique au numérique



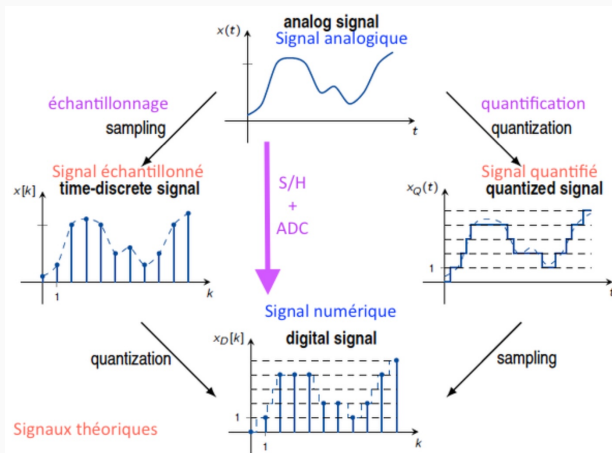
Signaux : de l'analogique au numérique



Signaux : de l'analogique au numérique



Signaux : analogique - numérique



Un **signal échantillonné** est un cas particulier de signal à temps discret.

Un **signal analogique** est un signal à TC et à valeurs continues.

Un **signal numérique** est un signal à TD et à valeurs discrètes.

Signaux

Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

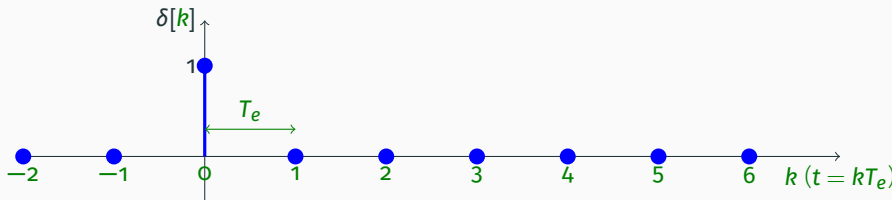
Energie et puissance moyenne d'un signal

Impulsion unité à TD : **signal de Kronecker**

$$\delta[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Bigg| \quad \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-i = 0, \text{ i.e. } k = i \\ 0 & \text{pour } k-i \neq 0. \end{cases}$$

Impulsion unité à TD : **signal de Kronecker**

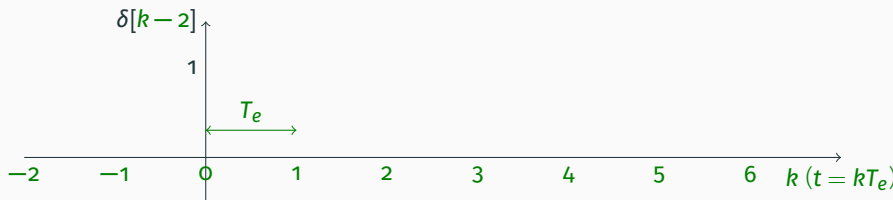
$$\delta[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-i = 0, \text{ i.e. } k = i \\ 0 & \text{pour } k-i \neq 0. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \delta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ k &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Impulsion unité à TD : **signal de Kronecker**

$$\delta[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Bigg| \quad \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-i = 0, \text{ i.e. } k = i \\ 0 & \text{pour } k-i \neq 0. \end{cases}$$

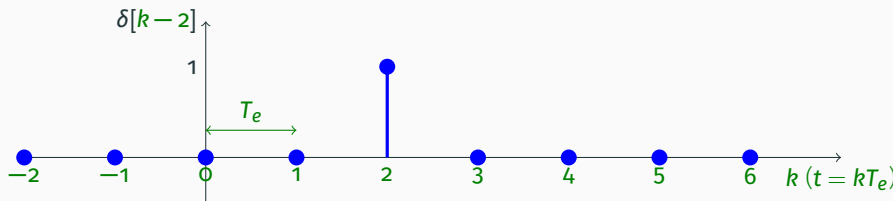


$$\delta[k-2] = \quad ?$$

$$k = \quad [\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad]$$

Impulsion unité à TD : **signal de Kronecker**

$$\delta[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-i = 0, \text{ i.e. } k = i \\ 0 & \text{pour } k-i \neq 0. \end{cases}$$

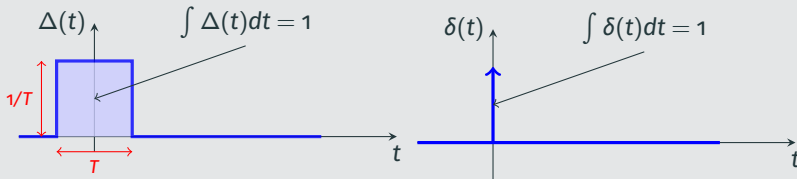


$$\begin{aligned} \delta[k-2] &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ k &= [-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6] \end{aligned}$$

Impulsion unité à TD : **signal de Kronecker**

$$\delta[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-i = 0, \text{ i.e. } k = i \\ 0 & \text{pour } k-i \neq 0. \end{cases}$$

Impulsion unité à TC : **impulsion de Dirac**



Impulsion et fonction delta de Dirac

Limite de différentes fonctions de type impulsions brèves $\Delta(t)$
(approximation mécanique : un coup de marteau)

Autres façons d'appréhender l'impulsion de Dirac :

- « fonction généralisée » de Dirac ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0, \quad \text{pour } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

- approche mathématique correcte : théorie des distributions
Pour toute fonction $x(t)$, régulière et continue en 0, la fonction $\delta(t)$ est une fonction singulière (mesure, distribution) telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(\tau) d\tau = x(0)$$

Propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau = x(t).$$

Autres façons d'appréhender l'impulsion de Dirac :

- « fonction généralisée » de Dirac ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0, \quad \text{pour } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

- approche mathématique correcte : théorie des distributions
Pour toute fonction $x(t)$, régulière et continue en 0, la fonction $\delta(t)$ est une fonction singulière (mesure, distribution) telle que :

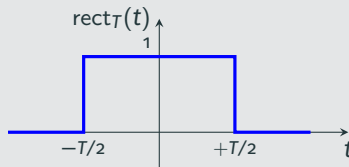
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(\tau) d\tau = x(0)$$

Propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau = x(t).$$

Signal rectangulaire en temps continu

$$\text{rect}_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T/2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



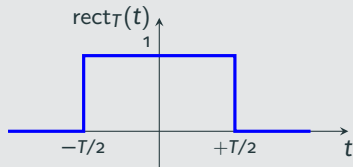
Le signal rectangle est d'amplitude **1** sur une durée **T** . Il permet de formaliser le fait qu'un signal est observé sur une durée finie : un signal $x(t)$ de durée limitée à un support **T** obéit à l'équation :

$$x(t) = x(t) \text{rect}_T(t).$$

Signaux classique : *rectangle* ou *fonction porte*

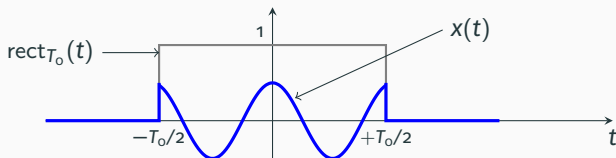
Signal rectangulaire en temps continu

$$\text{rect}_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T/2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Le signal rectangle est d'amplitude **1** sur une durée **T** . Il permet de formaliser le fait qu'un signal est observé sur une durée finie : un signal $x(t)$ de durée limitée à un support **T** obéit à l'équation :

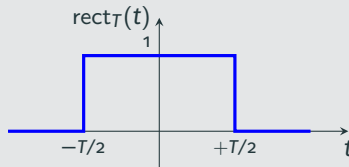
$$x(t) = x(t) \text{rect}_T(t).$$



Signaux classique : *rectangle* ou *fonction porte*

Signal rectangulaire en temps continu

$$\text{rect}_T(t) := \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T/2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Le signal rectangle est d'amplitude **1** sur une durée **T**. Il permet de formaliser le fait qu'un signal est observé sur une durée finie : un signal $x(t)$ de durée limitée à un support **T** obéit à l'équation :

$$x(t) = x(t) \text{rect}_T(t).$$

Signal rectangulaire en temps discret

$$\text{rect}_N[k] := \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \text{ ou } k \geq N \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- En temps continu, l'échelon unité est parfois appelé fonction de Heaviside :

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ 1 & \text{pour } t \geq 0. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad 1[k] = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < 0, \\ 1 & \text{pour } k \geq 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'échelon unité à TC peut être obtenu par intégration de l'impulsion de Dirac :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1(t).$$

- En TD, l'impulsion unité $\delta[k]$ peut être obtenue par *différentiation* de l'échelon unité :

$$1[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta[k-i]$$

$$\delta[k] = 1[k] - 1[k-1].$$

Signal sinusoïdal en temps continu

En temps continu, un signal sinusoïdal s'amplitude unitaire s'écrit :

$$x(t) = \sin(\omega t + \phi) = \sin(2\pi f t + \phi).$$

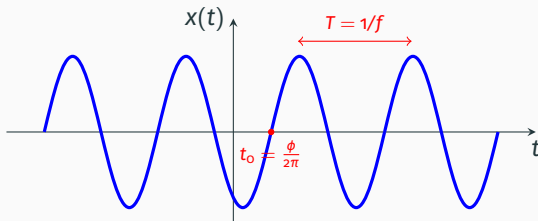
- ω : pulsation de la sinusoïde, en rad/s;
- $f = 1/T$: fréquence de la sinusoïde, en Hz ou s^{-1} ;
- T : période de la sinusoïde, en seconde;
- ϕ : phase de la sinusoïde, en rad.

Signal sinusoïdal en temps continu

En temps continu, un signal sinusoïdal d'amplitude unitaire s'écrit :

$$x(t) = \sin(\omega t + \phi) = \sin(2\pi f t + \phi).$$

- ω : pulsation de la sinusoïde, en rad/s;
- $f = 1/T$: fréquence de la sinusoïde, en Hz ou s^{-1} ;
- T : période de la sinusoïde, en seconde;
- ϕ : phase de la sinusoïde, en rad.



Signal sinusoïdal en temps continu

En temps continu, un signal sinusoïdal s'amplitude unitaire s'écrit :

$$x(t) = \sin(\omega t + \phi) = \sin(2\pi f t + \phi).$$

- ω : pulsation de la sinusoïde, en rad/s;
- $f = 1/T$: fréquence de la sinusoïde, en Hz ou s^{-1} ;
- T : période de la sinusoïde, en seconde;
- ϕ : phase de la sinusoïde, en rad.

Signal sinusoïdal en temps discret

$$x[k] = \sin(2\pi f k + \phi).$$

- f : fréquence normalisée (sans unité);
- $f \cdot f_e$: fréquence de la sinusoïde, en Hz.

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

Exemple introductif (signaux en temps discret) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3$$
$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i$$

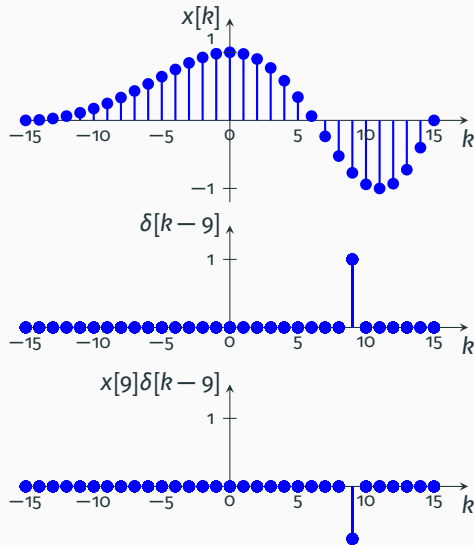
- Décomposition d'un signal à temps discret sur une base.
- Espace vectoriel de dimension 3 (nombre de vecteurs de la base).
- Vecteurs de base ψ_i : signaux de Kronecker décalés $\delta[k-i]$.
- **Question** : si le signal avait comporté 5 échantillons, quelle serait la dimension de l'espace vectoriel ?

Décomposition de signaux sur une base temporelle

En temps discret

Un signal peut être vu comme un vecteur dans un espace vectoriel défini par une base constituée des impulsions unités décalées :

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \delta[k - i].$$



En temps continu : rappel

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Signaux

Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

Energie et puissance moyenne d'un signal

Energie et puissance moyenne d'un signal

	Temps continu	Temps discret
Energie E_x	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] ^2$
Puissance moyenne P_x	$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[k] ^2$

Energie et puissance moyenne d'un signal

	Temps continu	Temps discret
Energie E_x	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] ^2$
Puissance moyenne P_x	$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) ^2 dt$	$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[k] ^2$

- Un signal à **énergie finie** est à puissance moyenne nulle.
- Un signal à **énergie infinie** peut être à puissance moyenne finie ou infinie.
- Un signal à **puissance moyenne finie** est à énergie infinie.

Exercice : déterminer l'énergie et la puissance moyenne de différents signaux TC ou TD : constante, rectangle, sinusöide, impulsion de Dirac, signal de Kronecker.

Signaux

Signaux : à temps continu - à temps discret

Signaux : analogiques - numériques

Signaux classiques - impulsion unité - rectangle

Energie et puissance moyenne d'un signal

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

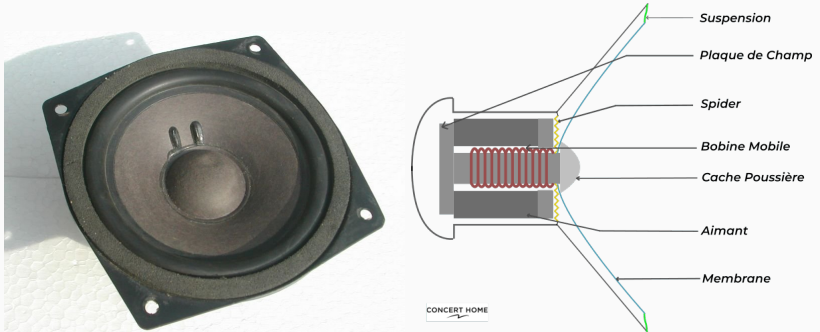
Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Notion de système

De manière générale, la notion de *système* permet de relier des **causes (entrées)** à des **effets (sorties)**. Mathématiquement, un système transforme des signaux d'entrée x en signaux de sortie y .



Coupe d'un haut-parleur. En fonction de l'**intensité du courant $x(t)$** qui la traverse, la bobine se déplace vers la droite ou vers la gauche en entraînant le diaphragme (membrane). Ce **déplacement $y(t)$** provoque des fluctuations de la pression de l'air, dont la propagation permet de restituer le son.

Système linéaire invariant (SLI)

Un système $\mathcal{S}$ est :

- homogène : si $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t)$ alors $\alpha x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha y_1(t)$

Système linéaire invariant (SLI)

Un système $\mathcal{S}$ est :

- homogène : si $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t)$ alors $\alpha x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha y_1(t)$
- additif : de plus si $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t) + y_2(t)$

Système linéaire invariant (SLI)

Un système $\mathcal{S}$ est :

- homogène : si $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t)$ alors $\alpha x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha y_1(t)$
- additif : de plus si $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t) + y_2(t)$

Un système $\mathcal{S}$ est :

- **linéaire** si il est additif et homogène. On peut alors utiliser le principe de superposition :

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Système linéaire invariant (SLI)

Un système $\mathcal{S}$ est :

- homogène : si $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t)$ alors $\alpha x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha y_1(t)$
- additif : de plus si $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t) + y_2(t)$

Un système $\mathcal{S}$ est :

- **linéaire** si il est additif et homogène. On peut alors utiliser le principe de superposition :

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

- **invariant** dans le temps : si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t)$ alors $x(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t - \tau)$

Système linéaire invariant (SLI)

Un système $\mathcal{S}$ est :

- homogène : si $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t)$ alors $\alpha x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha y_1(t)$
- additif : de plus si $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y_1(t) + y_2(t)$

Un système $\mathcal{S}$ est :

- **linéaire** si il est additif et homogène. On peut alors utiliser le principe de superposition :

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

- **invariant** dans le temps : si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t)$ alors $x(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t - \tau)$
- **Exercice** : déterminer si les trois systèmes suivants sont linéaires ou non

$$\mathcal{S}_1 : y_1[k] = 2x_1[k] \quad \mathcal{S}_2 : y_2[k] = x_2[k] + 2 \quad \mathcal{S}_3 : y_3[k] = (x_3[k])^2$$

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

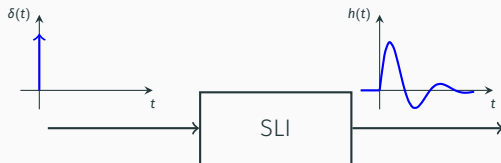
Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

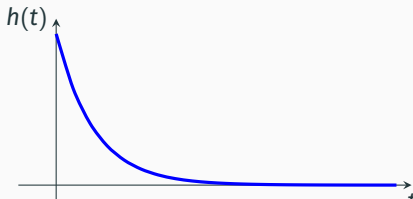
Réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant

Un système linéaire invariant (SLI) peut être *complètement* caractérisé par sa **réponse impulsionnelle (RI) h** .



La réponse impulsionnelle correspond à la sortie du SLI lorsque l'on place à son entrée une impulsion unité (impulsion de Dirac en TC ou signal de Kronecker en TD).

Exemples de réponses impulsionnelles :



Réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant

Deux autres caractéristiques usuelles (fonction de transfert, réponse en fréquence) découlent de la réponse impulsionnelle.

	Temps continu	Temps discret
Réponse impulsionnelle (RI)	$h(t)$	$h_d[k]$
Réponse en fréquence (RF)	$\mathcal{F}(h) = H(f)$	$\mathcal{F}(h_d) = H_d(f)$
Fonction de transfert (FT)	$\mathcal{L}(h) = H(s)$	$\mathcal{Z}(h_d) = H_d(z)$

Réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant

Deux autres caractéristiques usuelles (fonction de transfert, réponse en fréquence) découlent de la réponse impulsionnelle.

	Temps continu	Temps discret
Réponse impulsionnelle (RI)	$h(t)$	$h_d[k]$
Réponse en fréquence (RF)	$\mathcal{F}(h) = H(f)$	$\mathcal{F}(h_d) = H_d(f)$
Fonction de transfert (FT)	$\mathcal{L}(h) = H(s)$	$\mathcal{Z}(h_d) = H_d(z)$

La RI est une caractéristique du système qui ne peut pas être directement mesurée en temps continu :

- l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ n'a pas de réalité physique;
- elle peut être approchée (réponse à un impact en mécanique : imaginer votre réponse à coup de marteau sur un doigt au lieu du clou);
- elle se déduit d'autres caractéristiques mesurables;
- elle peut être obtenue théoriquement par résolution des équations différentielles.

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

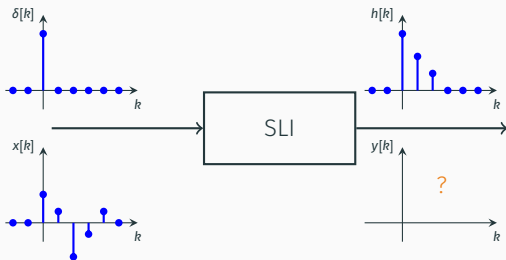
Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

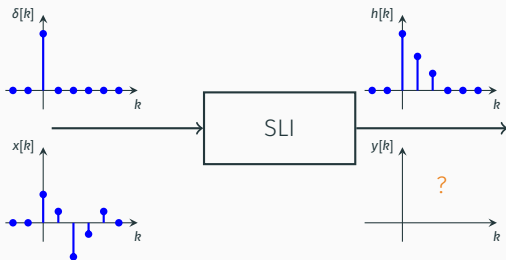
Convolution en temps discret

Connaissant $h[k]$, on cherche à déterminer la sortie $y[k]$ du SLI en réponse à un signal d'entrée $x[k]$ quelconque, avec $y[k] = \mathcal{S}x[k]$.



Convolution en temps discret

Connaissant $h[k]$, on cherche à déterminer la sortie $y[k]$ du SLI en réponse à un signal d'entrée $x[k]$ quelconque, avec $y[k] = \mathcal{S}x[k]$.



Propriété

RI
invariance
homogénéité
additivité

Entrée

$\delta[k]$
 $\delta[k - i]$
 $x[i] \cdot \delta[k - i]$
 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \cdot \delta[k - i]$

$\Rightarrow$

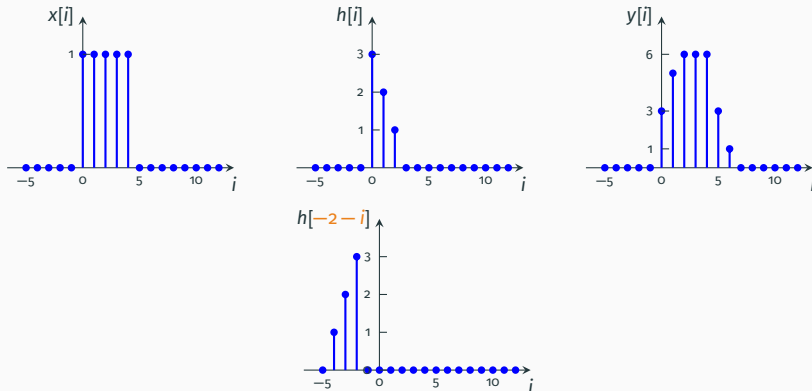
$x[k]$

Sortie

$h[k]$
 $h[k - i]$
 $x[i] \cdot h[k - i]$
 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] \cdot h[k - i]$

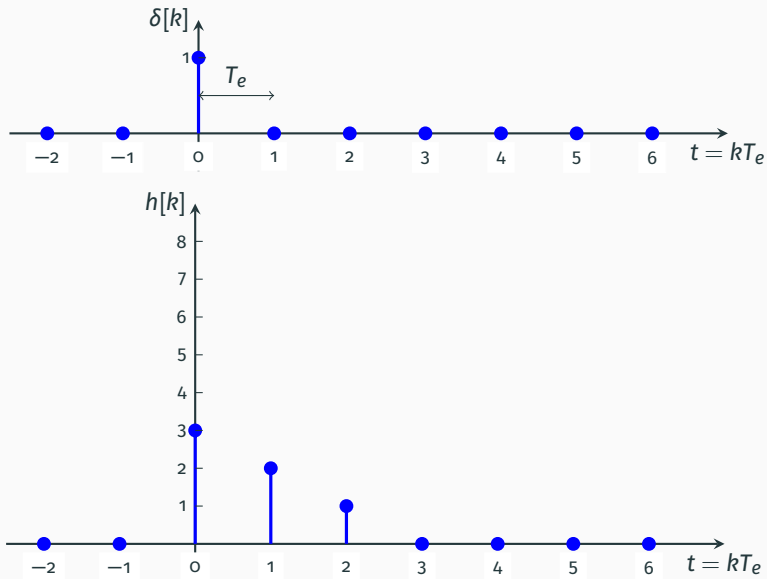
$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i] h[k - i]$$

Exemple de convolution en temps discret

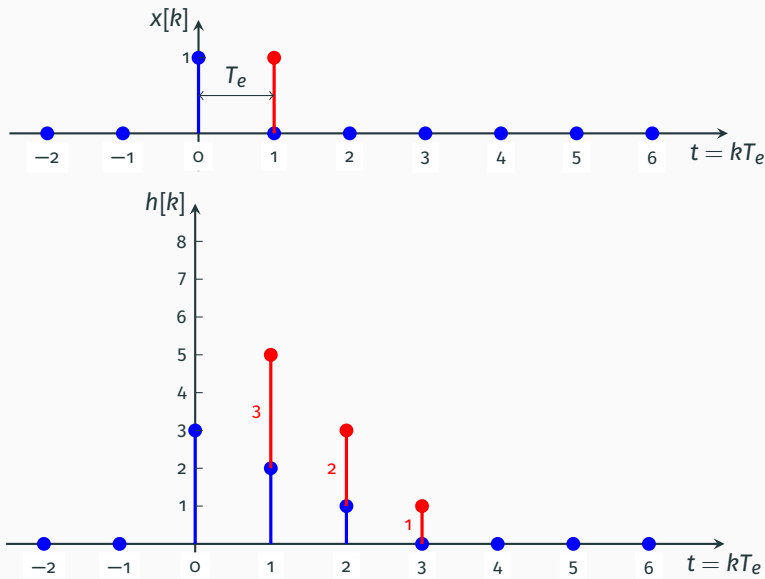


- calcul de la sortie $y[k]$, par exemple pour $k = -2$
- retournement de la réponse impulsionnelle $h[-i]$
- décalage (à gauche) de la RI $h[-2-i]$
- calcul du produit $h[-2-i]x[i]$ pour tout i
- $y[-2]$ est somme des produits effectués (tous nuls) $\Rightarrow y[-2] = 0$
- répétition des opérations pour les autres valeurs de k

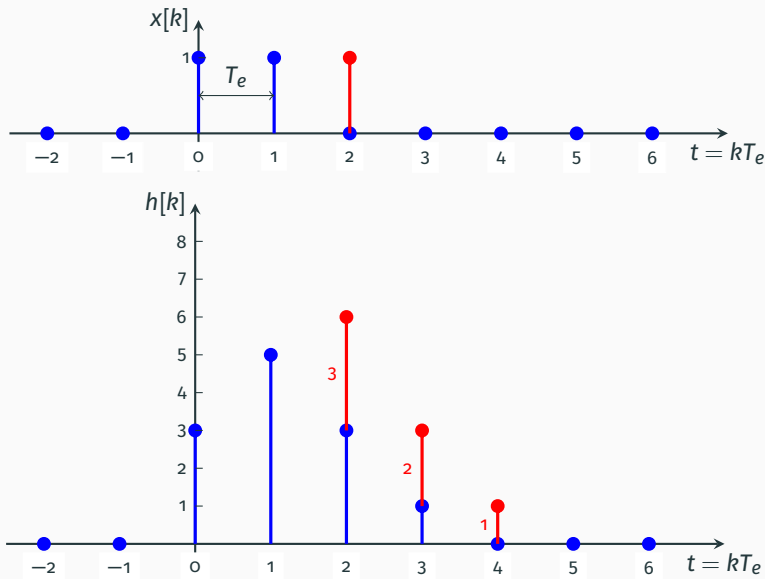
Convolution en temps discret : principe de superposition



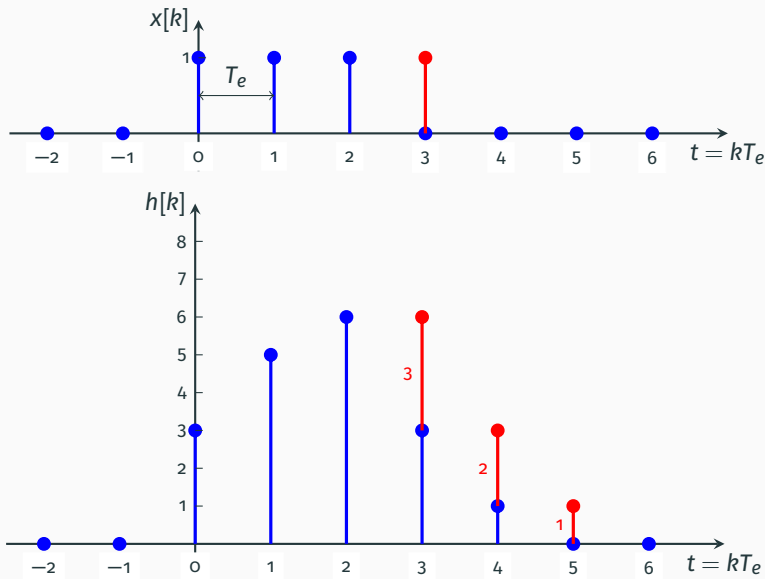
Convolution en temps discret : principe de superposition



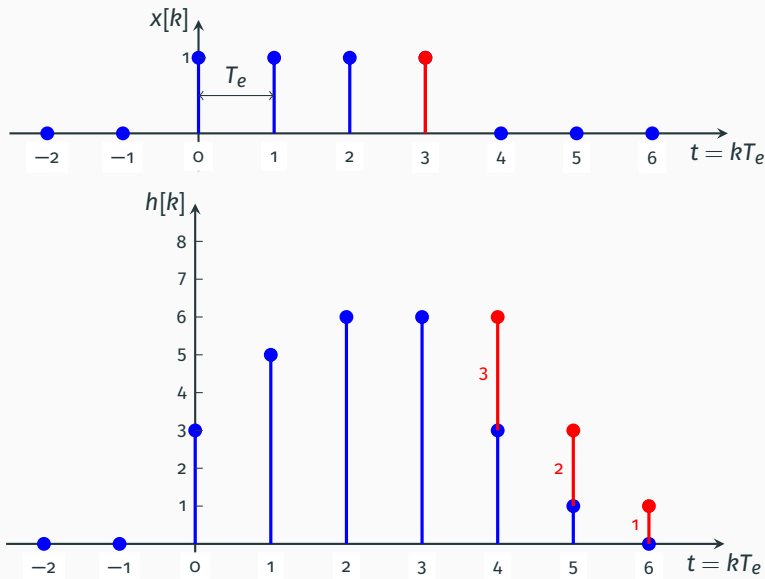
Convolution en temps discret : principe de superposition



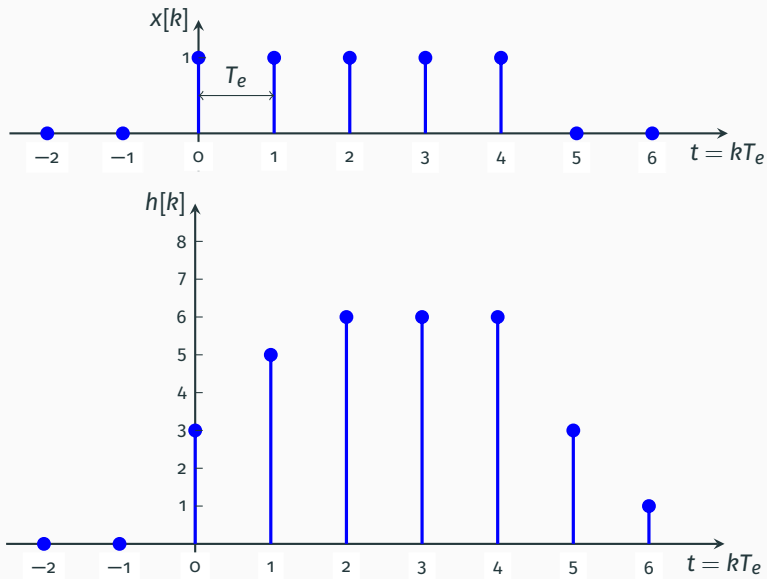
Convolution en temps discret : principe de superposition



Convolution en temps discret : principe de superposition

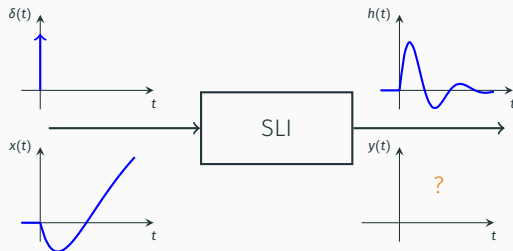


Convolution en temps discret : principe de superposition



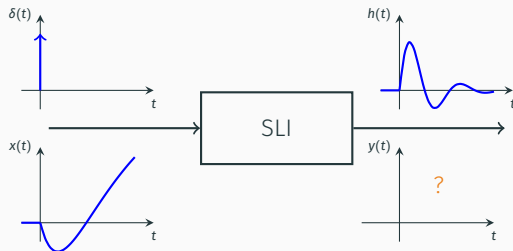
Convolution en temps continu

Un système linéaire invariant (SLI) peut être *complètement* caractérisé par sa **réponse impulsionnelle (RI) h** .



Convolution en temps continu

Un système linéaire invariant (SLI) peut être *complètement* caractérisé par sa **réponse impulsionnelle (RI) h** .



Propriété

RI
invariance
homogénéité
additivité

Entrée

$\delta[t]$
 $\delta(t - \tau)$
 $x(\tau) \cdot \delta(t - \tau)$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$

Sortie

$h(t)$
 $h(t - \tau)$
 $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$

du Dirac

$x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

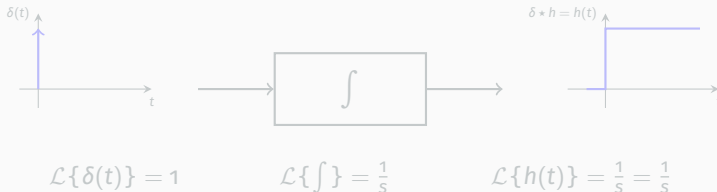
Convolution : propriétés

- La convolution exprime une relation fonctionnelle entre les signaux (fonctions) y et x : $y(t) = [h \star x](t)$ $y[k] = [h \star x][k]$

$$h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (\text{signaux continus})$$

$$h \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[k - i]. \quad (\text{signaux discrets})$$

- Le produit de convolution est **commutatif** : $y = h \star x = x \star h$
- L'impulsion unité δ est son élément neutre : $h \star \delta = h$
- Exemple :



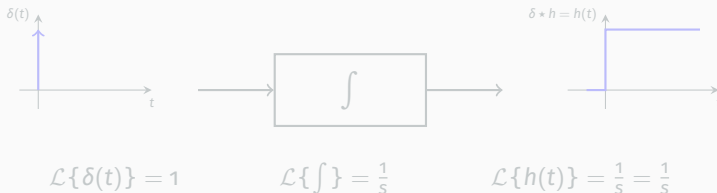
Convolution : propriétés

- La convolution exprime une relation fonctionnelle entre les signaux (fonctions) y et x : $y(t) = [h \star x](t)$ $y[k] = [h \star x][k]$

$$h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (\text{signaux continus})$$

$$h \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[k - i]. \quad (\text{signaux discrets})$$

- Le produit de convolution est **commutatif** : $y = h \star x = x \star h$
- L'impulsion unité δ est son élément neutre : $h \star \delta = h$
- Exemple :



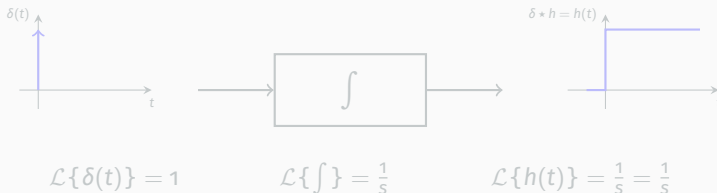
Convolution : propriétés

- La convolution exprime une relation fonctionnelle entre les signaux (fonctions) y et x : $y(t) = [h \star x](t)$ $y[k] = [h \star x][k]$

$$h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (\text{signaux continus})$$

$$h \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[k - i]. \quad (\text{signaux discrets})$$

- Le produit de convolution est **commutatif** : $y = h \star x = x \star h$
- L'impulsion unité δ est son élément neutre : $h \star \delta = h$
- Exemple :



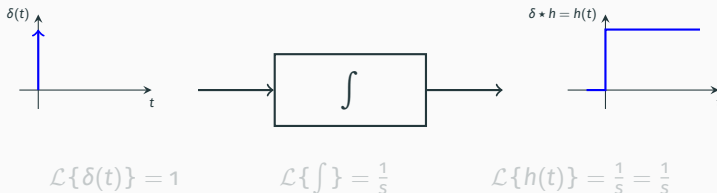
Convolution : propriétés

- La convolution exprime une relation fonctionnelle entre les signaux (fonctions) y et x : $y(t) = [h \star x](t)$ $y[k] = [h \star x][k]$

$$h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (\text{signaux continus})$$

$$h \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[k - i]. \quad (\text{signaux discrets})$$

- Le produit de convolution est **commutatif** : $y = h \star x = x \star h$
- L'impulsion unité δ est son élément neutre : $h \star \delta = h$
- Exemple :



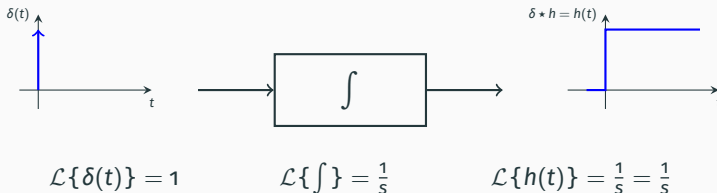
Convolution : propriétés

- La convolution exprime une relation fonctionnelle entre les signaux (fonctions) y et x : $y(t) = [h \star x](t)$ $y[k] = [h \star x][k]$

$$h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (\text{signaux continus})$$

$$h \star x[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[k - i]. \quad (\text{signaux discrets})$$

- Le produit de convolution est **commutatif** : $y = h \star x = x \star h$
- L'impulsion unité δ est son élément neutre : $h \star \delta = h$
- Exemple :



- Un système est *causal* si sa sortie à tout instant ne dépend que des valeurs de l'entrée à l'instant présent et aux instants passés (pas futurs) : la cause précède l'effet
- Un système causal n'est pas anticipatif (le mouvement d'un véhicule est causal car il n'anticipe pas les actions futures du conducteur)
- **La RI d'un système causal est donc nulle aux temps négatifs**

$$h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \implies y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- De plus, pour un signal d'entrée $x(t)$ nul aux temps négatif on obtient :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Un système est *causal* si sa sortie à tout instant ne dépend que des valeurs de l'entrée à l'instant présent et aux instants passés (pas futurs) : la cause précède l'effet
- Un système causal n'est pas anticipatif (le mouvement d'un véhicule est causal car il n'anticipe pas les actions futures du conducteur)
- **La RI d'un système causal est donc nulle aux temps négatifs**

$$h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \implies y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- De plus, pour un signal d'entrée $x(t)$ nul aux temps négatif on obtient :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Un système est *causal* si sa sortie à tout instant ne dépend que des valeurs de l'entrée à l'instant présent et aux instants passés (pas futurs) : la cause précède l'effet
- Un système causal n'est pas anticipatif (le mouvement d'un véhicule est causal car il n'anticipe pas les actions futures du conducteur)
- **La RI d'un système causal est donc nulle aux temps négatifs**

$$h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- De plus, pour un signal d'entrée $x(t)$ nul aux temps négatif on obtient :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Un système est *causal* si sa sortie à tout instant ne dépend que des valeurs de l'entrée à l'instant présent et aux instants passés (pas futurs) : la cause précède l'effet
- Un système causal n'est pas anticipatif (le mouvement d'un véhicule est causal car il n'anticipe pas les actions futures du conducteur)
- **La RI d'un système causal est donc nulle aux temps négatifs**

$$h(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \implies y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- De plus, pour un signal d'entrée $x(t)$ nul aux temps négatif on obtient :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(x)$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(x)$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(x)$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(x)$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(\mathbf{x})$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(\mathbf{x})$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(\mathbf{x})$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(\mathbf{x})$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(\mathbf{x})$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(\mathbf{x})$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

- Causalité des systèmes physiques
 - Les processus physiques à temps continu sont des systèmes causaux : on ne peut pas « remonter » le temps.
 - Un processus physique étudié par rapport à une dimension d'espace, donc de RI $h(\mathbf{x})$, peut être non causal. Par exemple, la réponse impulsionnelle d'un pont entre deux piliers est obtenue pour une force $\delta(\mathbf{x})$ (qui ne varie pas au cours du temps) appliquée en un point du pont, considéré comme point origine : on peut « remonter » l'espace.
- Causalité et systèmes numériques
 - Lorsqu'un traitement numérique (filtrage, régulation, ...) est effectué en temps réel le système numérique (filtre, correcteur, ...) est causal.
 - Lorsqu'un traitement numérique est effectué en temps différé le système numérique peut être causal ou non causal (fréquent en traitement numérique d'images).

Systèmes

Systèmes linéaires invariant (SLI)

Réponse impulsionnelle d'un SLI

Convolution

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

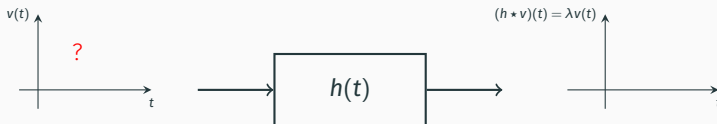
Signaux propres des systèmes linéaires invariants

La notion de signaux propres (ou fonctions propres) s'apparente à celle de vecteurs propres.



Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Pour quel type de signaux, la transformation opérée par le SLI donnera-t-elle un signal du même type à un facteur multiplicatif près?



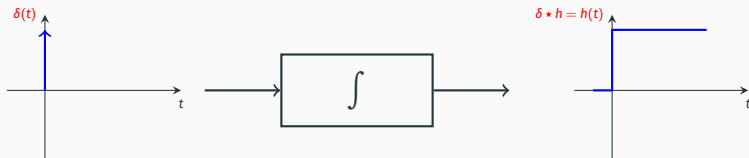
Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Exemple : En reprenant le cas d'un système intégrateur pur, pouvez-vous trouver un signal propre?



Signaux propres des systèmes linéaires invariants

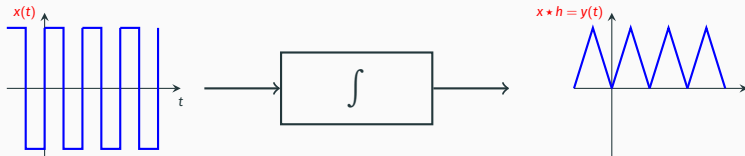
Exemple : En reprenant le cas d'un système intégrateur pur, pouvez-vous trouver un signal propre?



Comme l'impulsion de Dirac est transformée en un échelon, elle n'est donc pas un signal propre.

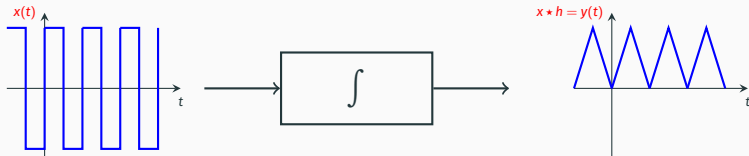
Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Exemple : Un signal carré périodique est transformé en un signal triangulaire périodique, il n'est donc pas non plus un signal propre.

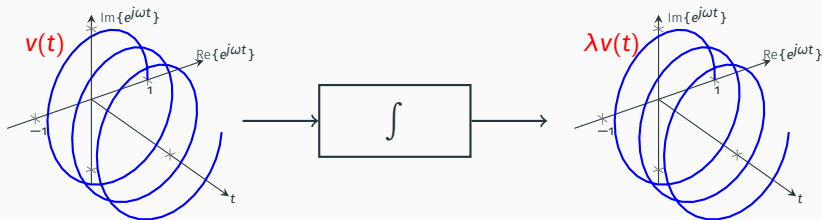


Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Exemple : Un signal carré périodique est transformé en un signal triangulaire périodique, il n'est donc pas non plus un signal propre.



Comme cela va être démontré dans la suite ce sont les **exponentielles complexes** qui sont les fonctions propres des SLI.



Signaux propres des systèmes linéaires invariants

- Lorsque le signal d'entrée $x(t)$, d'un système linéaire invariant de RI $h(t)$, est une exponentielle complexe

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t} e^{j2\pi f t}.$$

où s désigne une variable complexe $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$.

- Le signal $y(t)$ en sortie du système est obtenu par convolution

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{s(t-\tau)}d\tau = Ae^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} \\ &= H(s)x(t). \end{aligned}$$

- Les exponentielles complexes constituent les fonctions propres (au même sens que les vecteurs propres en algèbre) des SLI.
- $H(s)$ est une fonction de la variable complexe s , qui dépend de la RI du SLI, qui représente la *fonction de transfert* du système.

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

- Lorsque le signal d'entrée $x(t)$, d'un système linéaire invariant de RI $h(t)$, est une exponentielle complexe

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t} e^{j2\pi f t}.$$

où s désigne une variable complexe $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$.

- Le signal $y(t)$ en sortie du système est obtenu par convolution

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{s(t-\tau)}d\tau = Ae^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} \\ &= H(s)x(t). \end{aligned}$$

- Les exponentielles complexes constituent les fonctions propres (au même sens que les vecteurs propres en algèbre) des SLI.
- $H(s)$ est une fonction de la variable complexe s , qui dépend de la RI du SLI, qui représente la *fonction de transfert* du système.

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

- Lorsque le signal d'entrée $x(t)$, d'un système linéaire invariant de RI $h(t)$, est une exponentielle complexe

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t} e^{j2\pi ft}.$$

où s désigne une variable complexe $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$.

- Le signal $y(t)$ en sortie du système est obtenu par convolution

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{s(t-\tau)}d\tau = Ae^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} \\ &= H(s)x(t). \end{aligned}$$

- Les exponentielles complexes constituent les fonctions propres (au même sens que les vecteurs propres en algèbre) des SLI.
- $H(s)$ est une fonction de la variable complexe s , qui dépend de la RI du SLI, qui représente la *fonction de transfert* du système.

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

- Lorsque le signal d'entrée $x(t)$, d'un système linéaire invariant de RI $h(t)$, est une exponentielle complexe

$$x(t) = Ae^{st} = Ae^{\sigma t} e^{j2\pi ft}.$$

où s désigne une variable complexe $s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$.

- Le signal $y(t)$ en sortie du système est obtenu par convolution

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{s(t-\tau)}d\tau = Ae^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} \\ &= H(s)x(t). \end{aligned}$$

- Les exponentielles complexes constituent les fonctions propres (au même sens que les vecteurs propres en algèbre) des SLI.
- $H(s)$ est une fonction de la variable complexe s , qui dépend de la RI du SLI, qui représente la *fonction de transfert* du système.

Signaux propres des systèmes linéaires invariants

Cette propriété importante explique l'intérêt des transformations couramment utilisée en théorie des signaux et systèmes : transformation de Fourier ($s = j\omega$) et son extension, la transformation de Laplace ($s = \sigma + j\omega$). La notion de fonction de transfert est donc attachée à une transformation de la réponse impulsionnelle du système.

La propriété est également vraie en temps discret (z désigne un nombre complexe) :

$$x(k) = z^k$$
$$y(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)x[k-n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{k-n} = H(z)x(k)$$

avec $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$.

Dans ce cas, les transformations couramment utilisées sont la transformée en z et la transformation de Fourier en temps discret (TFtd).

- **Oliver Heaviside** (1850-1925, Médaille Faraday en 1922) est un ingénieur qui a introduit le calcul opérationnel, ou symbolique, en 1893 pour résoudre des équations différentielles ordinaires en électricité avec l'opérateur p . En 1926, J.R. Carson a introduit la transformée de Laplace (variable s) unilatérale pour rendre le calcul opérationnel plus rigoureux.
- **Paul Dirac** (1902-1984, Prix Nobel en 1933) est un physicien qui a introduit la « fonction » $\delta(t)$ en 1926 dans le cadre de la mécanique ondulatoire.
- **Laurent Schwartz** (1915-2002, Médaille Fields en 1950) est un mathématicien français, enseignant à Nancy puis à Polytechnique, et qui crée à partir de 1945 la théorie des distributions qui permet de rendre rigoureuses certaines procédures heuristiques, comme le calcul symbolique de Heaviside et la fonction δ de Dirac, et qui donne un cadre général à la transformation de Fourier.

