

Modélisation des processus aléatoires

Représentations temps-fréquence de signaux non-stationnaire

Master Ingénierie des Systèmes Complexes
MISC72.2

E.-H. Djermoune (CRAN, UL, CNRS)

`el-hadi.djermoune(at)univ-lorraine.fr`

20 novembre 2025

Table des matières

1 Analyse temps-fréquence : pourquoi faire ?

2 Transformée en ondelettes continue

3 Transformée en ondelettes discrète

4 Application au traitement d'image

Analyse temporelle **ou** fréquentielle

Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier permet de révéler le **contenu fréquentiel** d'un signal $x(t)$.

- Si $x(t)$ est périodique de période T , la décomposition en série de Fourier donne

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \implies x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

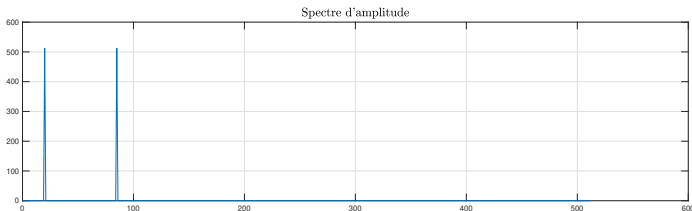
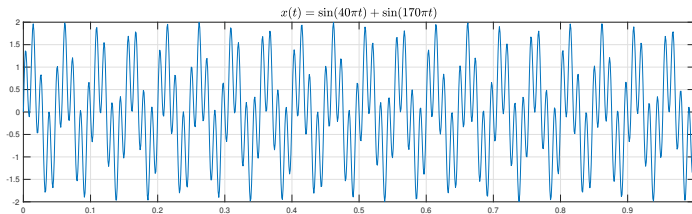
- Sinon, la transformée de Fourier donne :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad f \in \mathbb{R} \implies x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t}$$

Dans les 2 cas, on obtient la contribution à $x(t)$ de la « fréquence » $\frac{n}{T}$ ou f .

Analyse temporelle **ou** fréquentielle

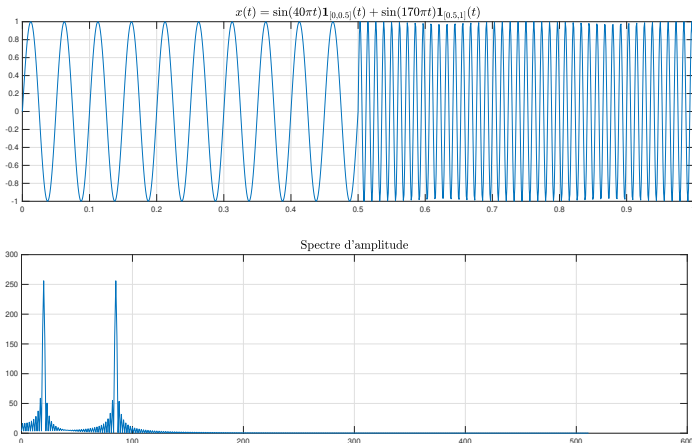
Exemple : deux notes de musique jouées en même temps.



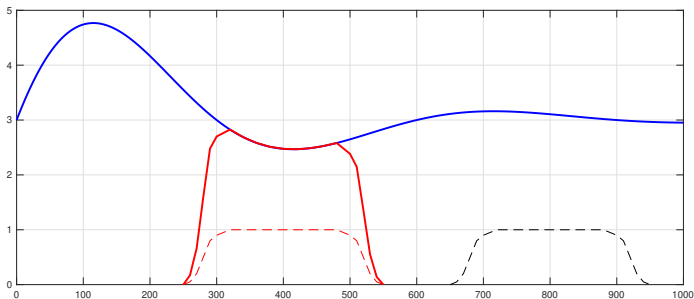
Analyse temporelle **ou** fréquentielle

Exemple : deux notes de musique jouées l'une après l'autre.

L'analyse en fréquence par transformée de Fourier n'informe pas sur la **localisation temporelle** d'un changement de régime dans le signal.



Analyse temps-fréquence



Transformée de Fourier à fenêtre glissante (STFT)

Pour palier à la perte de localisation temporelle, on définit la **transformée de Fourier à fenêtre glissante**. Il s'agit de multiplier $x(t)$ par une fenêtre $h(t - b)$ et de calculer la transformée de Fourier de ce produit :

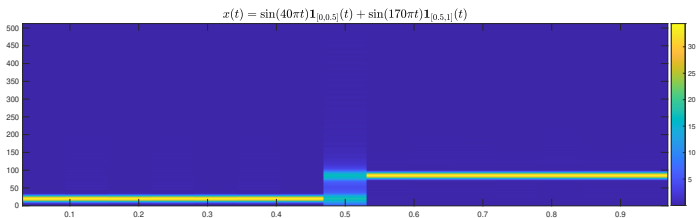
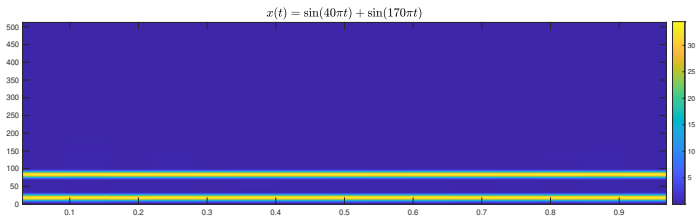
$$G_x(f, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t - b)e^{-j2\pi ft} dt$$

où b est une position temporelle et f est la fréquence.

Analyse temps-fréquence

Exemple : deux notes de musique jouées ensemble ou l'une après l'autre.

L'analyse temps-fréquence permet de retrouver à la fois les fréquences (les notes) et l'information temporelle (l'ordre dans lequel elles sont jouées).



Spectrogramme (module de la STFT)

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

Considérons par exemple le signal :

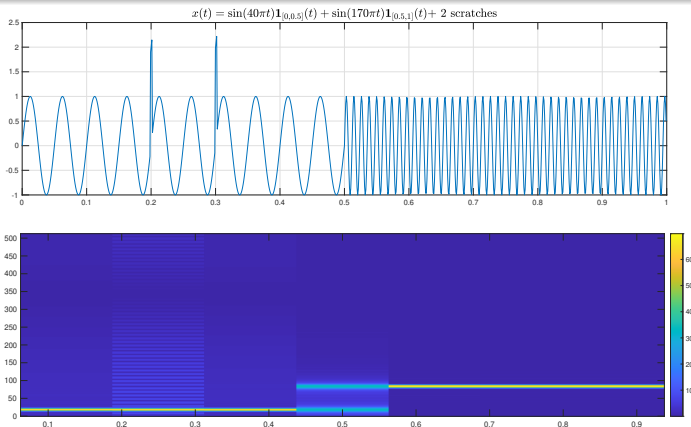
$$x(t) = \sin(40\pi t)\mathbf{1}_{[0,0.5]}(t) + \sin(170\pi t)\mathbf{1}_{[0.5,1]}(t) + 2\delta(t - 0.2) + 2\delta(t - 0.3)$$

où $\delta(t - t_0)$ est l'impulsion de Dirac localisé en t_0 .

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

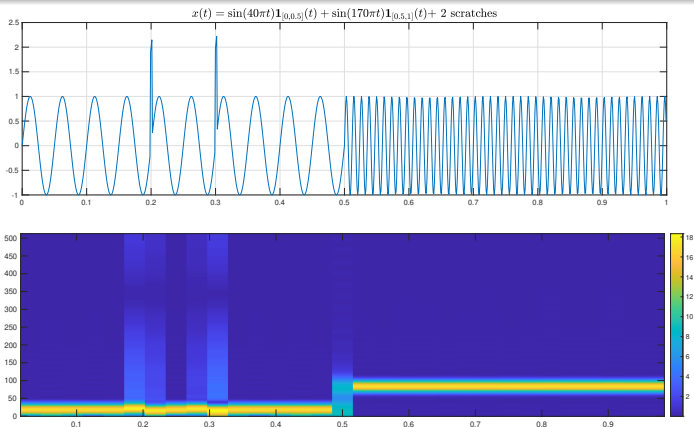


Fenêtre de 0.25 s : 😊 résolution fréquentielle ☹️ localisation temporelle

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.



Fenêtre de 0.06 s : 😞 résolution fréquentielle 😊 localisation temporelle

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

Il est alors impossible de trouver en pratique une largeur à la fenêtre $h(t)$ qui permette une visualisation simultanée des phénomènes rapides et lents : cela impliquerait que la fenêtre $h(t)$ soit bien localisée à la fois en temps et en fréquence, **ce qui est impossible** (principe d'incertitude de Heisenberg).

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

Il est alors impossible de trouver en pratique une largeur à la fenêtre $h(t)$ qui permette une visualisation simultanée des phénomènes rapides et lents : cela impliquerait que la fenêtre $h(t)$ soit bien localisée à la fois en temps et en fréquence, **ce qui est impossible** (principe d'incertitude de Heisenberg).

L'analyse en ondelettes (WT) a pour objectif de rendre compte de ces deux phénomènes simultanément, en introduisant une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence :

- fenêtre large pour les basses fréquences ;
- fenêtre courte pour les hautes fréquences.

Analyse temps-fréquence

Limitations de la transformée de Fourier à fenêtre glissante

En dessous d'une certaine taille de la fenêtre $h(t)$, la transformée de Fourier à fenêtre glissante présente les mêmes limitations que la transformée de Fourier.

Il est alors impossible de trouver en pratique une largeur à la fenêtre $h(t)$ qui permette une visualisation simultanée des phénomènes rapides et lents : cela impliquerait que la fenêtre $h(t)$ soit bien localisée à la fois en temps et en fréquence, **ce qui est impossible** (principe d'incertitude de Heisenberg).

L'analyse en ondelettes (WT) a pour objectif de rendre compte de ces deux phénomènes simultanément, en introduisant une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence :

- fenêtre large pour les basses fréquences ;
- fenêtre courte pour les hautes fréquences.

*On ne peut savoir précisément quelle composante spectrale existe à un instant donné. Le mieux qu'on puisse faire est de chercher quelles composantes spectrales existent sur **un intervalle de temps** donné. C'est un problème de résolution et c'est la raison principale pour laquelle les chercheurs sont passés de la STFT à la WT. En effet, la STFT donne une résolution fixe pour tous les instants de temps alors que la WT donne une résolution variable.*

Analyse temps-fréquence : fonctions analysantes

Transformée de Fourier à fenêtre glissante

La STFT est donnée par :

$$G_x(f, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{h(t-b)e^{-j2\pi ft}}_{\psi_{f,b}^*(t)} dt.$$

Les fonction analysantes sont :

$$\psi_{f,b}(t) = h(t-b)e^{j2\pi ft}.$$

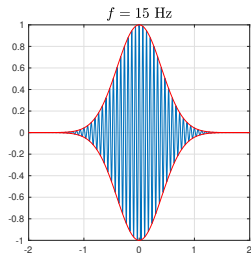
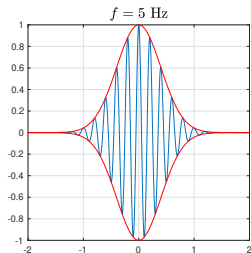
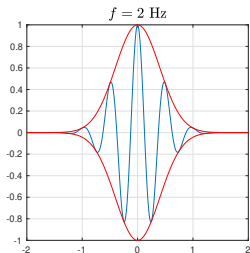
Exemple : dans la transformée de Gabor, la fenêtre $h(t)$ est une gaussienne d'échelle σ :

$$h(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\pi t^2 / \sigma^2}.$$

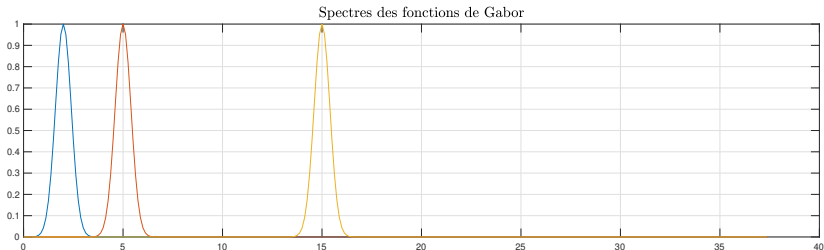
Les fonction de Gabor sont alors $\psi_{f,0}(t) = e^{-\pi t^2} e^{j2\pi ft}$ (pour $\sigma = 1$) et

$$\psi_{f,b}(t) = e^{-\pi(t-b)^2} e^{j2\pi ft}.$$

Analyse temps-fréquence : fonctions analysantes

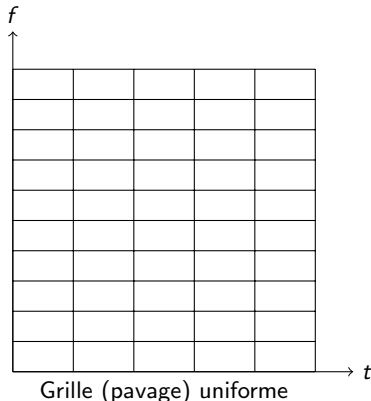
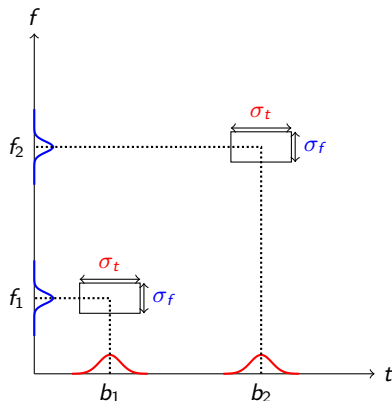


Fonctions de Gabor pour $\sigma = 1$ et $f = 2, 5, 15$ (partie réelle)



Transformée de Fourier des fonctions de Gabor. Ces fonctions sont des filtres passe-bande de largeurs fixes

Analyse temps-fréquence : boîtes temps-fréquence



- Principe d'incertitude : $\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$ (la surface de la boîte ne peut pas être arbitrairement petite)
- La surface est minimale pour les fonctions $h(t)$ de Gabor ($\sigma_t \sigma_f = \frac{1}{4\pi}$)
- Le pavage temps-fréquence est uniforme

Table des matières

1 Analyse temps-fréquence : pourquoi faire ?

2 Transformée en ondelettes continue

3 Transformée en ondelettes discrète

4 Application au traitement d'image

Transformée en ondelettes continue

Définition

La transformée en ondelettes continue (CWT) est définie par :

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt.$$

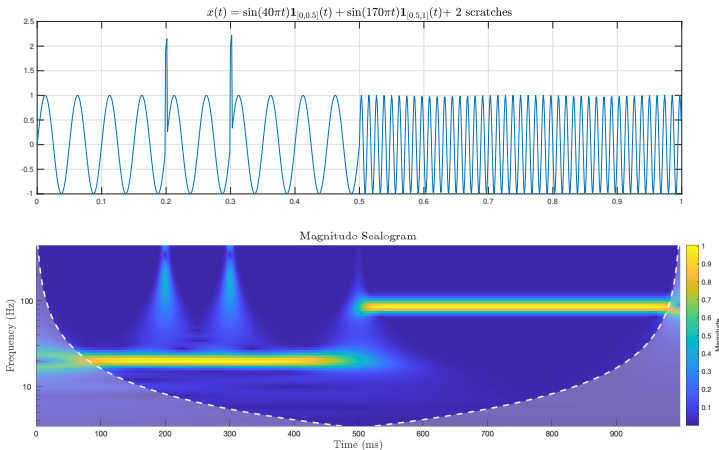
Les fonction analysantes ou **ondelettes** (*wavelets*) sont définies par :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right).$$

- $\psi(t)$ = ondelette mère ;
- a = échelle = taille du support = inverse d'une fréquence ;
- b = position temporelle.

Transformée en ondelettes continue

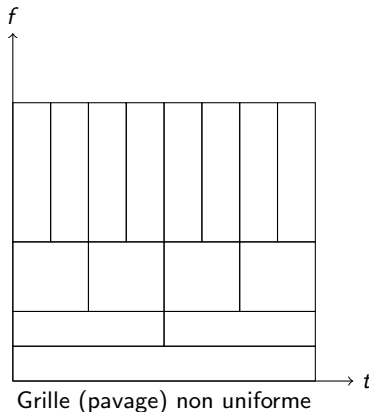
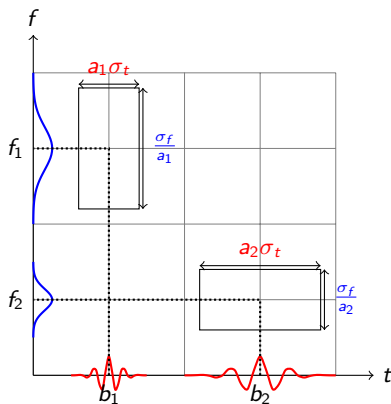
Exemple : deux notes de musique jouées l'une après l'autre + 2 scratch (Diracs)



La transformée en ondelettes permet :

- une « bonne » localisation temporelle des hautes fréquences (changements rapides) ;
- une « bonne » localisation fréquentielle des basses fréquences.

Transformée en ondelettes continue : boîtes temps-fréquence



- Boîtes temps-fréquence de 2 ondelettes $\psi_{a_1, b_1}(t)$ et $\psi_{a_2, b_2}(t)$ ($a_1 < a_2$)
- Quand a est faible (a_1), le support temporel est petit mais le support fréquentiel est grand et se déplace vers les hautes fréquences

Transformée en ondelettes continue

Définition d'une ondelette

Une fonction $\psi(t)$ est une ondelette si sa TF vérifie la condition :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty.$$

ce qui implique que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$: $\psi(t)$ est de moyenne nulle ; elle doit donc osciller (d'où le nom d'*ondelette*).

Exemples :

- L'ondelette de Morlet (ou de Gabor) :

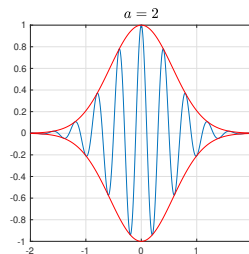
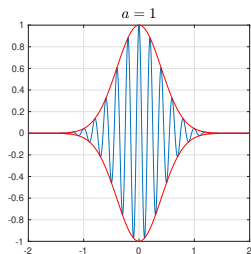
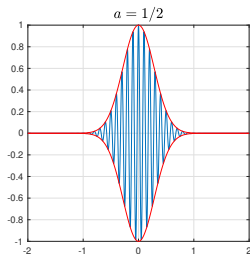
$$\psi(t) = e^{-\pi t^2} e^{j\omega t} \quad \Longrightarrow \quad \Psi(f) = e^{-\pi(f - \frac{\omega}{2\pi})^2}$$

- Les dérivées de la gaussienne :

$$\psi_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} e^{-\pi t^2} \quad \Longrightarrow \quad \Psi_n(f) = (2j\pi f)^n e^{-\pi f^2}$$

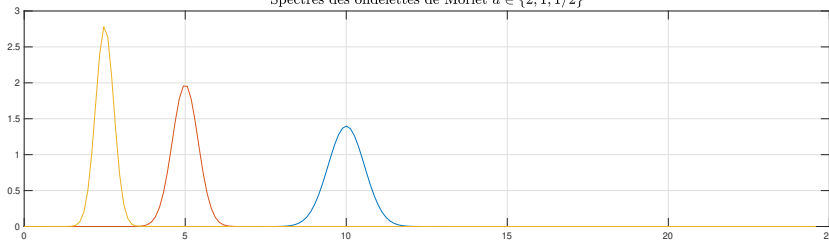
- Le chapeau mexicain (*mexican hat*) : dérivée seconde de la gaussienne.

Transformée en ondelettes continue : exemples



Ondelettes de Morlet d'échelles $a = 1/2, 1, 2$ (partie réelle). L'échelle a donne la taille du support (inverse d'une fréquence), b donne la position

Spectres des ondelettes de Morlet $a \in \{2, 1, 1/2\}$



Transformée de Fourier des ondelettes de Morlet. Les ondelettes sont des filtres passe-bande autour de la fréquence $f = f_0$. Pour l'ondelette de Morlet $f_0 = 5$ (maximum de Ψ)

Transformée en ondelettes continue : définition équivalente

Formules équivalentes

$$W_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

$$W_x(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Psi^*(af) e^{j2\pi fb} df$$

Interprétation

- Vu du coté temporel (ou spatial) t , $W_x(a, b)$ renseigne sur le signal x autour du point b dans un voisinage de taille $\sim a$;
- Vu du coté fréquentiel (f), $W_x(a, b)$ renseigne sur le signal X autour de la fréquence $\sim \frac{1}{a}$.
- L'analyse en ondelettes est une **analyse temps-échelle**.

Transformée en ondelettes continue : inversion et implémentation

Formule d'inversion

La synthèse de $x(t)$ à partir de sa CWT est donnée par :

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \right\}$$

Implémentation

On peut voir la CWT comme un produit de convolution pour a fixé :

$$\begin{aligned} W_x(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \\ &= x(b) * \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(-\frac{b}{a} \right) \right]}_{\tilde{\psi}_a(b)} \end{aligned}$$

Transformée en ondelettes continue : exemple Matlab

```
% ondelette.m - programme de transformée en ondelettes

% signal à analyser (y)
n = 1000; t = (0:n)/n; % nombre d'échantillons et temps
y = sin(40*pi*t).*(t<.5) + sin(170*pi*t).*(t>=.5);

p = fix(log(n)/log(2)); dx = 1/n; x = -1:dx:1;

% calcul de l'ondelette
a0 = 1/sqrt(2);
p = 2*p;
a=a0.^[0:p-1]; % échelles
W = zeros(p, n);
for i=1:p
    xx = x/a(i);

    g = exp(-xx.^2/2).*exp(j*5*xx)/sqrt(a(i)); % ondelette de Morlet
    %g = (1-2*xx.^ 2).*exp(-2*xx.^2)/sqrt(a(i)); % chapeau mexicain

    % calcul des coefficients d'ondelettes a l'echelle a
    wa = conv(y, conj(g));
    W(i,:) = abs(wa(n+1:2*n));
end

% affichage
subplot(2,1,1), plot(t(1:n), y(1:n)), title('Représentation temporelle')
subplot(2,1,2), imagesc(t,log2(a),W), title('Coefficients d''ondelettes')
```

Table des matières

1 Analyse temps-fréquence : pourquoi faire ?

2 Transformée en ondelettes continue

3 Transformée en ondelettes discrète

4 Application au traitement d'image

Passage au discret

- La transformée en ondelettes continue fournit une représentation **rendondante** d'un signal
- La transformée en ondelettes discrète (DWT) est une version échantillonnée de la précédente ; elle conduit à une réduction importante du nombre de dilatations et de translations :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi\left(\frac{t - k\tau_0 a_0^j}{a_0^j}\right)$$

Échantillonnage sur une grille dyadique

- $a_0 = 2 \Rightarrow$ l'échelle $a = 2^j$
- $\tau_0 = 1 \Rightarrow$ la translation temporelle $b = k2^j$
- t est le temps ; j et k sont des entiers

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - k2^j}{2^j}\right)$$

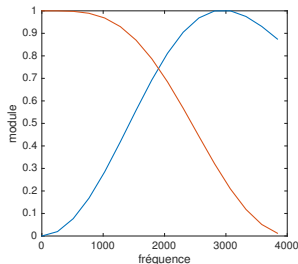
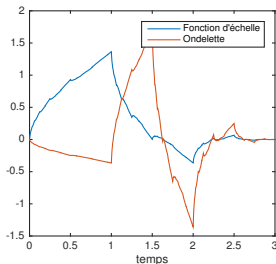
- Une condition suffisante pour la reconstruction du signal $x(t)$ est que l'ensemble des fonction $\{\psi_{j,k}\}$ forment une **base orthogonale**.

Transformée en ondelettes rapide

Implémentation de la DWT

- La DWT nécessite le calcul d'un nombre fini de **coefficients**
- Si les ondelettes $\{\psi_{j,k}\}$ forment une analyse multirésolution, alors il existe une **ondelette père** $\phi(t)$ (appelée aussi **fonction d'échelle**) qui permet d'obtenir une implémentation très rapide de la DWT en utilisant un banc de filtres
- Le spectre de l'ondelette correspond à un **filtre passe-haut** ; celui de la fonction d'échelle à un **filtre passe-bas**

Exemple : ondelette de Daubechies Db2



Transformée en ondelettes rapide

DWT d'un signal discret

- Soit $x(k)$ un signal discret
- Soient $h(k)$ et $g(k)$ les filtres RIF associées à ϕ et ψ , respectivement
- **Initialisation** : on note $a_0(k) = x(k)$ l'approximation de $x(k)$ à l'échelle $j = 0$ et $d_0(k) = 0$ l'erreur d'approximation (détail)
- **Pour** $j = 1, \dots$ **faire**

$$a_j(k) = \sum_n h(n - 2k) a_{j-1}(n)$$

$$d_j(k) = \sum_n g(n - 2k) a_{j-1}(n)$$

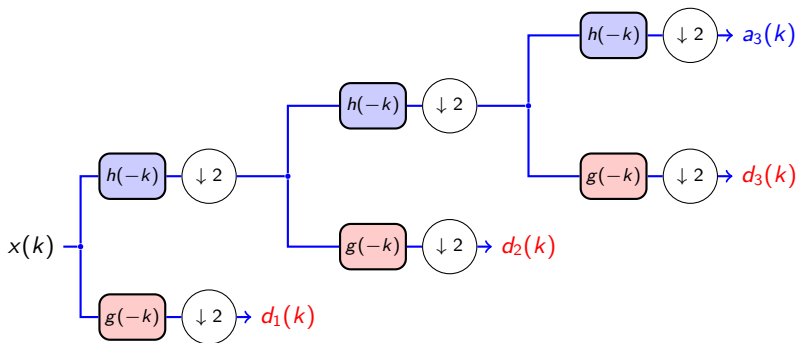
- Les coefficients $a_j(k)$ et $d_j(k)$ s'obtiennent par une succession de convolutions et de décimation par un facteur 2
- À l'échelle j , on obtient une approximation grossière $a_j(k)$ (signal basse fréquence) et les coefficients d'ondelettes $d_j(k)$ (signal haute fréquence)

Transformée en ondelettes rapide

Algorithme pyramidal

Une transformée en ondelettes rapide se calcule par une cascade de **filtrages** par $h(-k)$ et $g(-k)$ suivis de **sous-échantillonnages** d'un facteur 2.

- $a_j(k)$: approximation de $x(k)$ à l'échelle j ;
- $d_j(k)$: détail de $x(k)$ à l'échelle j .

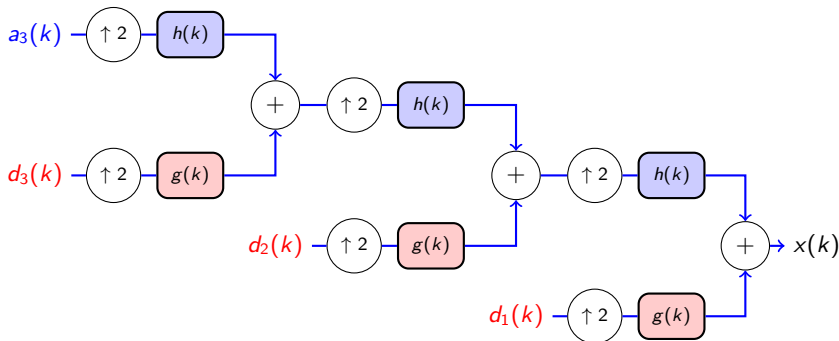


Transformée en ondelettes rapide : synthèse

Algorithme pyramidal pour la reconstruction

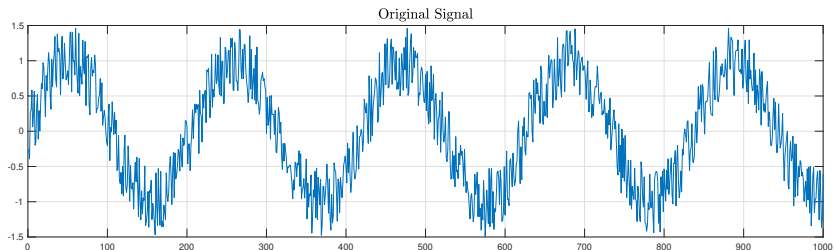
La synthèse du signal de départ est obtenue par transformée en ondelettes inverse. Cette transformée se présente également sous forme pyramidale :

- on reconstruit $a_{j-1}(k)$ en insérant des 0 entre les échantillons de $a_j(k)$ et $d_j(k)$;
- on filtre par $h(k)$ et $g(k)$ en on somme le résultat...



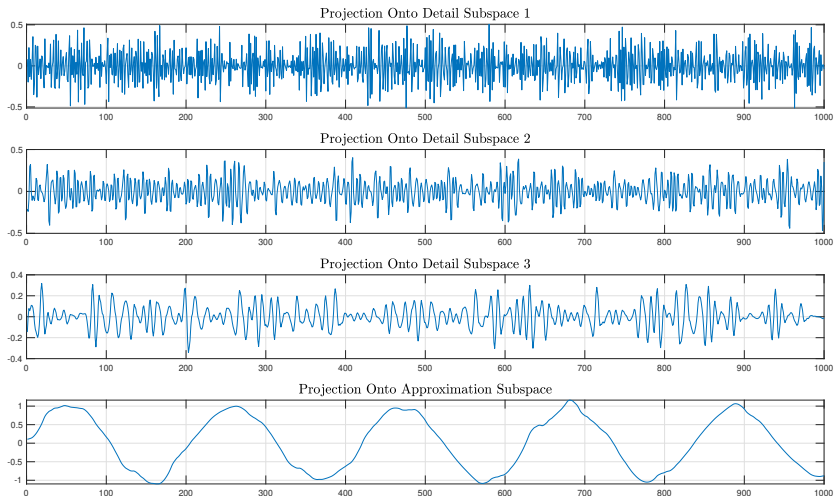
Exemple : débruitage d'un signal

Signal constitué d'une sinusoïde dans un bruit.



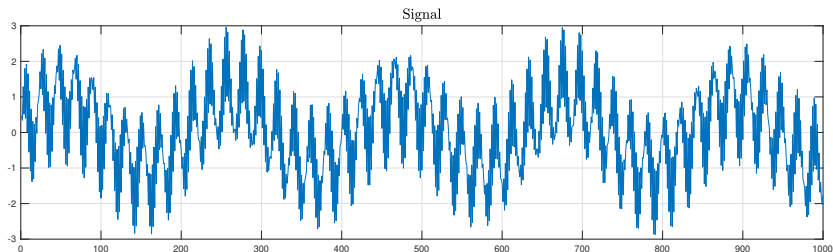
Exemple : débruitage d'un signal

Analyse multirésolution sur 3 niveaux.



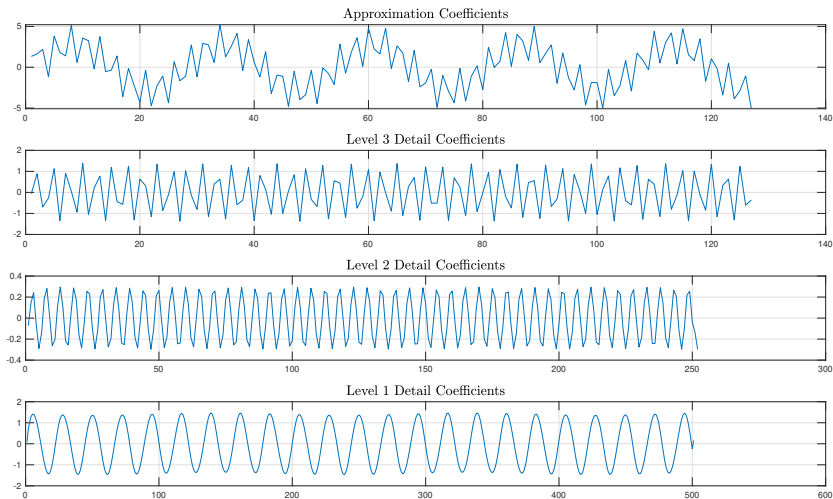
Exemple : séparation de signaux bande-étroite

Signal constitué de plusieurs sinusôides.



Exemple : séparation de signaux bande-étroite

Approximation et détails sur 3 niveaux de décomposition.



Applications de la transformée en ondelettes

Analyse

- Utilisée pour l'analyse de signaux non-stationnaires (contenu fréquentiel variable : radar, sismique, EEG, ECG...).

Analyse & synthèse

- Réduction de bruit ;
- Compression (JPEG2000, base de données des empreintes digitales du FBI) ;
- Détection de contours en image ;
- Tatouage (watermarking) d'images ;
- Extraction de motifs en segmentation d'images.

Table des matières

1 Analyse temps-fréquence : pourquoi faire ?

2 Transformée en ondelettes continue

3 Transformée en ondelettes discrète

4 Application au traitement d'image

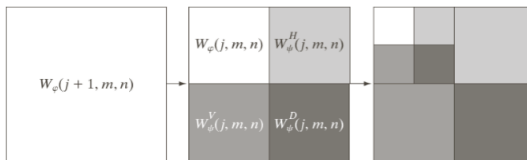
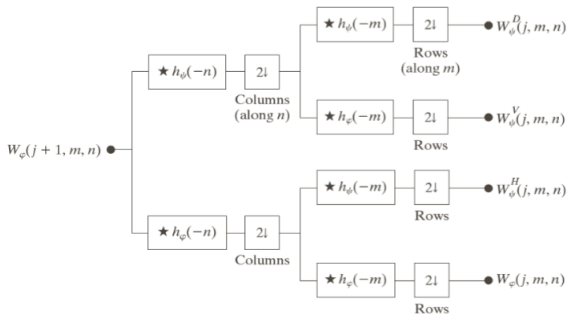
Préambule

Comment faire ?

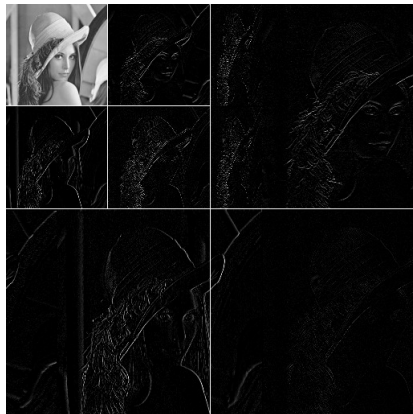
Il existe 2 façons d'utiliser la décomposition en ondelettes pour les images :

- ① décomposition en ondelettes des “signaux” lignes puis colonnes ;
- ② décomposition en ondelettes 2-D orientables (échelle + translation + orientation).

Principe



Exemple : image de Lena



Applications

Réduction de bruit

Décomposition en ondelettes → seuillage de certains coefficients (généralement haute fréquence) liés au bruit.

Le seuillage peut être **dur**, **mou**, ou encore à **hystérésis**.

Compression

Décomposition en ondelettes → sauvegarde l'image approximée et certains coefficients d'intensité élevée.

Le taux de compression est contrôlé par la qualité désirée de l'image résultante qui est souvent mesurée par le PSNR :

$$PSNR = 10 \cdot \log \left(\frac{d^2}{EQM} \right),$$

où d est l'intensité maximale des pixels de l'image et EQM est l'erreur quadratique moyenne entre l'image originale et compressée.

Applications

Tatouage (*watermarking*) d'image

Il consiste à insérer dans une image une information (un copyright par exemple) sans que celle ci ne soit visible.

Décomposition en ondelettes → insertion de l'information par modification des coefficients les plus intenses.

Détection de contours

Décomposition en ondelettes → suppression de l'approximation et reconstruction, puis seuillage.

