

Modélisation des processus aléatoires

Spectre de processus aléatoires

Master Ingénierie des Systèmes Complexes
MISC72.2

E.-H. Djermoune (CRAN, UL, CNRS) `el-hadi.djermoune(at)univ-lorraine.fr`

1^{er} octobre 2025

Table des matières

1 Rappel : Analyse de Fourier

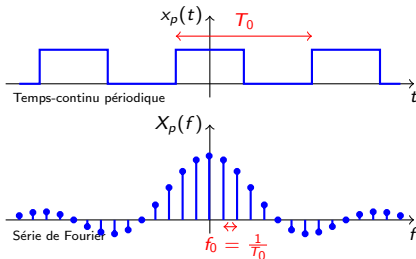
2 Représentation spectrale des signaux aléatoires

- Position du problème
- Périodogramme
- Densité spectrale de puissance
- Bruit blanc

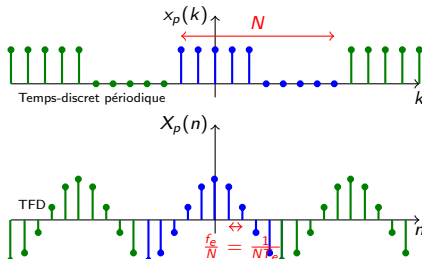
3 Signaux aléatoire : synthèse

Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

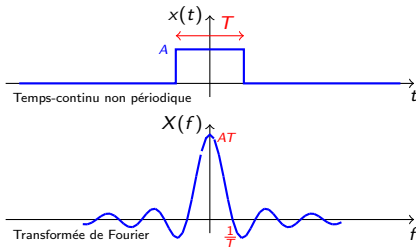
Série de Fourier (SF)



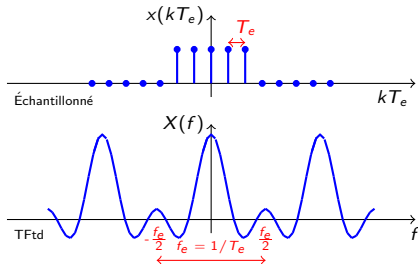
Série de Fourier discrète (SFD)



Transformée de Fourier (TF)



Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)



Une transformée de Fourier peut en cacher une autre

	temps continu	temps discret
fréquences discrètes	Série de Fourier $X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$	Transformée de Fourier discrète $X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi nk/N}$ pour $0 \leq n \leq N-1$ (fft) $x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j2\pi nk/N}$ pour $0 \leq k \leq N-1$ (ifft)
fréquences continues	Transformée de Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	Transformée de Fourier à temps discret $X(f) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-j2\pi fkT_e}$ $x(kT_e) = \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f) e^{j2\pi fkT_e} df$

Table des matières

1 Rappel : Analyse de Fourier

2 Représentation spectrale des signaux aléatoires

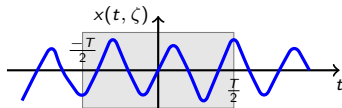
- Position du problème
- Périodogramme
- Densité spectrale de puissance
- Bruit blanc

3 Signaux aléatoire : synthèse

Représentation spectrale : position du problème

- La transformée de Fourier d'un signal déterministe d'énergie finie ($x(t) \in L^2(\mathbb{R})$) donne un résultat complexe dont on exploite le module (spectre d'amplitude) et l'argument (spectre de phase) ainsi que les densités spectrales d'énergie ou de puissance.
- L'analyse spectrale des processus aléatoires est plus complexe : le résultat d'une TF sur un morceau de trajectoire (d'énergie finie) va dépendre de la trajectoire considérée.
- Des approximations de la densité spectrale de puissance d'une suite de v.a. stationnaire au sens faible peuvent être obtenues à partir d'un nombre fini d'échantillons correspondant à un morceau de trajectoire. Le calcul de ces approximations s'appuie sur la **théorie de l'estimation**.
- En première approche, deux problèmes apparaissent :
 - les processus aléatoires sont à **énergie infinie** ;
 - le résultat d'une application de la TF sur un morceau de trajectoire (d'énergie finie) va dépendre de la trajectoire considérée.

Périodogramme (1)



- Soit $x(t, \zeta)$ une trajectoire de la suite de v.a.
- La TF de $x(t, \zeta)$ n'existe pas en général car une des conditions de convergence n'est pas satisfaite (signal d'énergie infinie).
- On étudie alors un signal à durée limitée $x_T(t, \zeta)$ équivalent à $x(t, \zeta)$ sur une fenêtre rectangulaire de durée T .
 - La puissance moyenne de $x_T(t, \zeta)$ est donnée par :

$$P_x(T, \zeta) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t, \zeta)|^2 dt.$$

- En exploitant l'identité de Parseval (conservation de la puissance entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel) on obtient :

$$P_x(T, \zeta) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}_{x_T}(f, \zeta)|^2 df.$$

où $\mathcal{F}_{x_T}(f, \zeta)$ désigne la TF¹ du signal $x_T(t, \zeta)$.

- La quantité $|\mathcal{F}_{x_T}(f, \zeta)|^2$ représente la **densité spectrale d'énergie**.

1. En temps discret il faut utiliser la transformée de Fourier en temps discret.

Périodogramme (2)

- Le **périodogramme**², qui représente la **densité spectrale de puissance** de la trajectoire tronquée, est alors donné par :

$$\frac{1}{T} |\mathcal{F}_{x_T}(f, \zeta)|^2.$$

- Le périodogramme est en principe différent pour chaque trajectoire considérée.
- Pour généraliser, on prend en compte toutes les trajectoires (une infinité d'expériences ζ) non tronquées ($T \rightarrow \infty$) en considérant une densité de puissance moyenne :

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{T} |\mathcal{F}_{x_T}(f, \zeta)|^2 \right\}.$$

- Même pour un processus ergodique on ne peut pas se passer de l'espérance : en pratique il faut donc exploiter un périodogramme moyenné (ou des techniques plus élaborées d'estimation spectrale).
- Sous certaines conditions cette limite est égale à la TF de la fonction d'autocorrélation qui est, par définition, la **densité spectrale de puissance (DSP)**.

2. Cette terminologie est historiquement associée à la recherche de périodicités cachées.

Densité spectrale de puissance (1)

- La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire, non nécessairement stationnaire, est égale à la TF de la moyenne temporelle de la fonction d'autocorrélation statistique du processus :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{r_{xx}(t, t + \tau)} e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \quad \overline{r_{xx}(t, t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_{xx}(t, t + \tau) dt$$

- Le théorème de Wiener-Khinchine permet de définir la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire.

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire au sens faible est définie comme la TF de sa fonction d'autocorrélation :

- en temps continu

$$S_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau,$$

- en temps discret (TFtd)

$$S_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k T_e}.$$

Densité spectrale de puissance (2)

- La densité spectrale de puissance représente la localisation de la puissance sur l'axe des fréquences.
- La puissance moyenne dans une bande de fréquence donnée s'obtient par intégration dans cette bande de fréquence.
- La **puissance moyenne** d'un signal

$$P_x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2, \quad (1)$$

- correspond à la valeur de sa fonction d'autocorrélation temporelle en $k = 0$:

$$r_{xx}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+k],$$

- et s'obtient en intégrant la densité spectrale de puissance :

$$P_x = r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df, \quad \text{pour un processus aléatoire ;}$$

$$P_x = r_{xx}[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f) df, \quad \text{pour une suite de variables aléatoires.}$$

Densité spectrale de puissance - propriétés

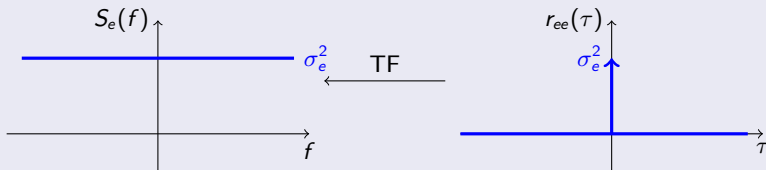
- ❶ La fonction d'autocorrélation des signaux stationnaires au sens faible et ergodiques ne dépend pas de la trajectoire considérée, elle n'est donc pas aléatoire.
- ❷ La fonction d'autocorrélation est une fonction réelle paire, donc sa TF, *i.e.* la DSP, est réelle symétrique par rapport à la fréquence $f = 0$.
- ❸ De plus la densité spectrale de puissance est non négative :

$$S_x(f) \geq 0.$$

Bruit blanc - temps continu

Bruit blanc à temps continu $e(t)$

Processus aléatoire stationnaire au sens faible, centré et dont la DSP est constante sur tout l'axe des fréquences. Il est appelé ainsi par analogie avec la lumière blanche dont le spectre est à large bande sur les fréquences optiques. C'est un processus à puissance moyenne infinie^a. La fonction d'autocorrélation correspondante est une impulsion de Dirac.



DSP et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc en temps continu

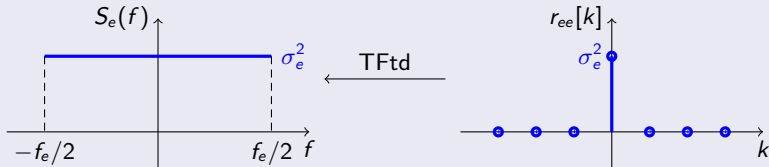
a. La notion abstraite de bruit blanc à temps continu est à manipuler avec prudence et reste complexe à appréhender : il est par exemple difficile d'imaginer la trajectoire d'un tel processus.

Bruit blanc - temps discret

Bruit blanc à temps discret $e[n]$

est caractérisé par une DSP constante sur l'intervalle $[-0.5f_e, 0.5f_e]$:

$$S_e(f) = \sigma_e^2, \quad r_{ee}[k] = \sigma_e^2 \delta[k]. \quad (2)$$



DSP et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc en temps discret

- 1 Il s'agit donc d'une suite de v.a. non corrélées, centrées, ayant la même variance et à puissance moyenne finie.
- 2 Elle est stationnaire au sens faible.
- 3 Dans cette définition il n'est pas supposé que la densité de probabilité soit la même pour chaque v.a., seule la variance est identique.

Bruit blanc gaussien - suite de v.a. i.i.d.

- ① Dans le cas d'un **bruit blanc** avec une distribution **gaussienne**³ identique pour chaque v.a. de la suite, la décorrélation implique l'indépendance, et l'on obtient alors une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d).
- ② La fonction d'autocorrélation d'une suite de v.a. i.i.d. **centrées**, est une impulsion numérique.
 - C'est donc un **cas particulier de bruit blanc** à temps discret.
 - Un bruit blanc ne nécessite toutefois que la stationnarité au sens faible (**une suite de v.a. i.i.d. est stationnaire au sens strict**).
 - Attention, une suite de v.a. i.i.d. n'est pas nécessairement centrée.

3. Un bruit blanc n'est pas nécessairement gaussien !

Table des matières

- 1 Rappel : Analyse de Fourier
- 2 Représentation spectrale des signaux aléatoires
 - Position du problème
 - Périodogramme
 - Densité spectrale de puissance
 - Bruit blanc
- 3 Signaux aléatoire : synthèse

Description temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques

