

# Modélisation des processus aléatoires

## Suites et processus aléatoires

Master Ingénierie des Systèmes Complexes  
MISC72.2

E.-H. Djermoune (CRAN, UL, CNRS)      [el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr](mailto:el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr)

22 septembre 2025

# Table des matières

## 1 Suite et processus aléatoires

- Définitions et exemples
- Caractérisation d'une suite de variables aléatoires
- Moments statistiques d'un processus aléatoire

## 2 Stationnarité et ergodicité

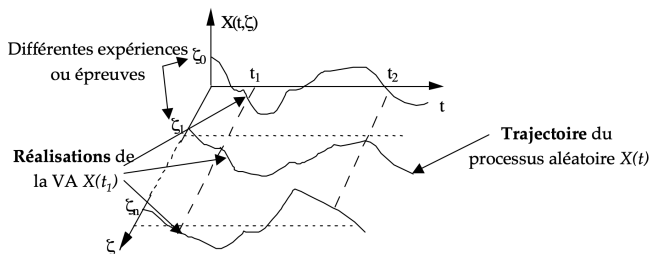
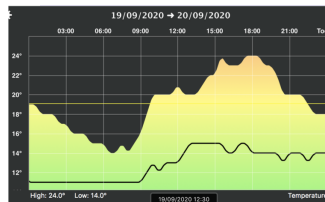
- Définition de la stationnarité
- Définition de la stationnarité
- Comparaison de signaux stationnaires et non stationnaires
- Rappel : énergie et puissance moyenne d'un signal
- Moments temporels
- Ergodicité

## 3 Fonctions de corrélation temporelles

- Fonctions d'intercorrélation temporelle
- Fonctions d'autocorrélation temporelle

# Suite de v.a. et processus aléatoires

- ① Une **suite de variables aléatoires** (suite aléatoire ; *sequence of random variables*) est un ensemble de v.a. (discrètes ou continues) fonctions de  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\zeta$  noté  $X[n, \zeta]$  ou  $X_n[\zeta]$  ou  $X[n]$  ou  $X_n$ .
- ② Un **processus aléatoire** (*stochastic process*) est un ensemble de variables aléatoires (discrètes ou continues) fonctions de  $t \in \mathbb{R}$  et  $\zeta$  noté  $X(t, \zeta)$  ou  $X_t(\zeta)$  ou  $X(t)$  ou  $X_t$ .



# Modélisation par des suites de v.a. ?

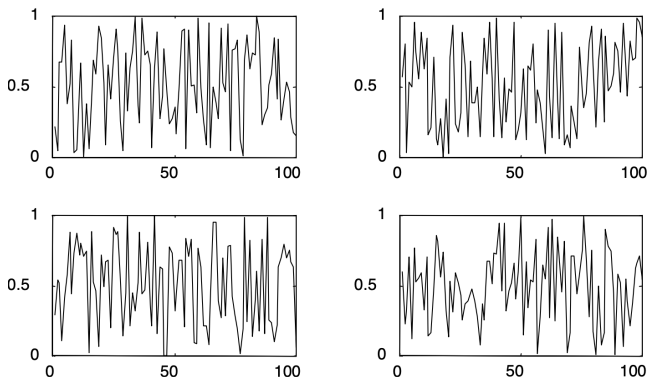
## Exemple : réacteurs chimiques soumis aux mêmes conditions expérimentales

- La température de réaction, échantillonnée à un pas  $T_e$ , est modélisée par une suite de v.a.  $X(n, \zeta)$ .
- L'évolution temporelle de la température d'un des réacteurs va constituer une trajectoire de cette suite de v.a.
- En théorie, une trajectoire est un signal de durée illimité. Autant de trajectoires différentes que de réacteurs.
- Le relevé de la température à un instant  $t_1 = n_1 T_e$  donné, pour un réacteur donné  $\zeta_0$ , correspond à **une réalisation** de la v.a.  $X(n_1)$ . Chaque réacteur (expérience) fournit une réalisation différente de la température à l'instant  $t_1 = n_1 T_e$ .

# Modélisation par des suites de v.a. ?

- Pour de nombreuses applications pratiques, les données sont disponibles sous forme de signaux à temps discret (signaux échantillonnés, signaux synthétiques, données économiques fonctions du temps) que l'on appelle couramment **série temporelle** (*time series*).
- Ces données sont donc susceptibles d'être modélisées comme des réalisations de **suites de variables aléatoires**.
- Les traitements numériques effectués sur ces données résultent fréquemment de la discrétisation (passage en dimension finie) d'un problème théoriquement continu (dimension infinie).
- Ce qui est disponible en pratique constitue en fait un ou des morceaux de trajectoires, *i.e.* un nombre fini  $N$  de données numériques.

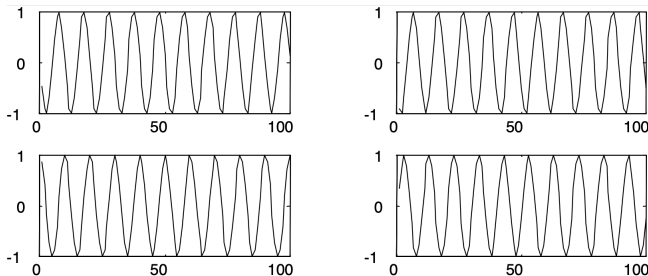
## Exemple de trajectoire (1)



Quatre (morceaux de) trajectoires d'une suite de v.a. i.i.d.

- Les morceaux de trajectoires comprennent  $N = 100$  échantillons.
- Les v.a. de la suite sont **indépendantes et identiquement distribuées** (i.i.d.) selon une loi uniforme entre 0 et 1.
- Pour des facilités de lecture les courbes sont tracées en continu mais il s'agit bien en fait de signaux à temps discret.

## Exemple de trajectoire (2)



Quatre (morceaux de) trajectoires d'une sinusoïde à phase aléatoire

- Les morceaux de trajectoires comprennent  $N = 100$  échantillons (signal à temps discret représenté en continu pour faciliter la lecture) d'un signal sinusoïdal  $x[n] = A \cos(2\pi f_1 n T_e + \phi)$ .
- La phase  $\phi$  est une v.a. distribuée uniformément entre 0 et  $2\pi$ .
- En supposant que  $T_e = 1$  seconde, que valent  $A$  et  $f_1$  ?

## Caractérisation d'une suite de variables aléatoires

- La caractérisation idéale d'une suite de v.a. consiste à décrire chaque v.a. de la suite par sa loi de probabilité. Cette loi n'est **pas forcément identique** pour chaque v.a.
- La description pour une suite de  $n$  variables aléatoires est donnée par la densité de probabilité conjointe :

$$p_X(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)),$$

où  $t_i$  désigne un temps discret.

- Un cas particulier est celui où la loi est identique pour chaque v.a. constituant la suite.
- De façon générale, la description complète reste toutefois complexe et une caractérisation plus simple, se limitant aux moments statistiques d'ordre 2 (moyenne statistique et fonction d'autocorrélation), est souvent utilisée.

# Moments statistiques d'un processus aléatoire (1)

- Les définitions sont données dans le cas de **processus aléatoires** et peuvent être aisément transposées au cas des **suites de v.a.** en substituant l'indice  $t \in \mathbb{R}$  par l'indice  $n \in \mathbb{Z}$  et les symboles d'intégration  $\int$  par des symboles de sommation  $\sum$ .
- Il est important de **bien distinguer** les **moments statistiques** des **moments temporels** qui seront définis ultérieurement.

## Moyenne statistique et variance

En général, moyenne statistique et variance dépendent de l'instant considéré (les moyennes des températures extérieures, relevées en un point donné, à midi et à minuit n'ont pas de raison d'être identiques). Ces deux fonctions du temps sont respectivement définies par les expressions suivantes :

$$m_X(t) = \mathbb{E} \{X(t)\},$$

$$\sigma_X^2(t) = \mathbb{E} \{(X(t) - m_X(t))(X^*(t) - m_X^*(t))\},$$

où la notation  $(\cdot)^*$  signifie complexe conjugué.

# Moments statistiques d'un processus aléatoire (2)

## Fonctions de corrélation statistiques

- 1 La **fonction d'autocorrélation statistique** décrit la corrélation entre deux v.a.  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$ . Elle dépend des instants  $t_1$  et  $t_2$  considérés et peut se représenter comme une fonction de deux variables :

$$r_{XX}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \{X(t_1)X^*(t_2)\}. \quad (1)$$

**La suite du cours est restreinte au cas de processus aléatoires réels.**

- 2 La **fonction d'autocovariance statistique** exprime la covariance entre deux v.a.  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$ . Elle correspond à la fonction d'autocorrélation du processus centré :

$$\begin{aligned} c_{XX}(t_1, t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \{(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))\} \\ &= \mathbb{E} \{X(t_1)X(t_2)\} - m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= r_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \end{aligned}$$

# Table des matières

## 1 Suite et processus aléatoires

- Définitions et exemples
- Caractérisation d'une suite de variables aléatoires
- Moments statistiques d'un processus aléatoire

## 2 Stationnarité et ergodicité

- Définition de la stationnarité
- Définition de la stationnarité
- Comparaison de signaux stationnaires et non stationnaires
- Rappel : énergie et puissance moyenne d'un signal
- Moments temporels
- Ergodicité

## 3 Fonctions de corrélation temporelles

- Fonctions d'intercorrélation temporelle
- Fonctions d'autocorrélation temporelle

# Stationnarité des processus aléatoires (1)

## ① Dans le langage courant :

- l'adjectif stationnaire est souvent utilisé pour qualifier l'évolution de l'état d'une personne malade ;
- l'état est stationnaire lorsqu'il n'y pas d'évolution notable de la maladie, en termes d'aggravation ou de guérison, au cours du temps.

## ② Ce sens est proche de la définition mathématique suivante :

Un processus aléatoire est **stationnaire au sens strict** (*strict-sense stationary*) si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.

- Une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) est donc stationnaire au sens strict :
  - la densité de probabilité est identique pour toutes les variables aléatoires  $X[n]$  et ne dépend pas de  $n$  ;
  - de plus les v.a.  $X[n]$  et  $X[k]$  sont mutuellement indépendantes pour tout  $n \neq k$ .

## Stationnarité des processus aléatoires (2)

### 8 Stationnarité au sens faible :

- L'hypothèse de stationnarité au sens strict est souvent relâchée au profit d'une hypothèse moins restrictive définie comme suit.

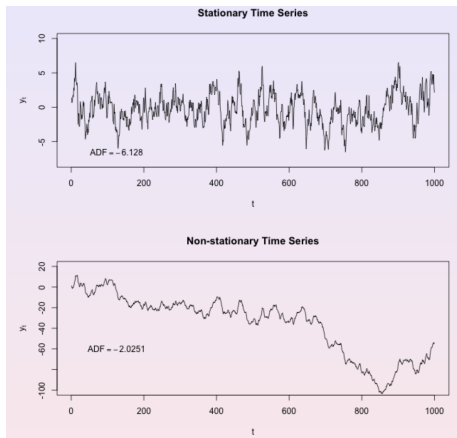
Un processus aléatoire est **stationnaire au sens faible** (*wide-sense stationary*) si :

- sa moyenne est indépendante de  $t$ , i.e.  $m_X(t) = m_X$  ;
- sa fonction d'autocovariance ne dépend que du délai (*time lag*)  $\tau = t_2 - t_1$  :

$$c_{XX}(t, t + \tau) = c_{XX}(\tau) = \mathbb{E} \{ (X(t) - m_X)(X(t + \tau) - m_X) \} = r_{XX}(\tau) - m_X^2.$$

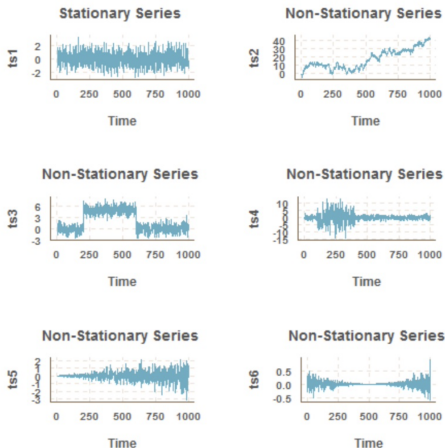
- La variance qui correspond à la valeur de la fonction d'autocovariance pour  $t_1 = t_2$ , i.e.  $\sigma_X^2 = c_{XX}(0)$  ne dépend donc pas non plus de  $t$ .

# Stationnarité d'une suite de v.a. : exemple



Signal stationnaire vs signal non stationnaire. ADF : test augmenté de Dickey-Fuller ; plus il est négatif plus il est probable que le signal soit stationnaire. Il existe d'autres tests statistiques de stationnarité. D'après Protonk at English Wikipedia, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=41600857>

# Comparaison de signaux stationnaires et non stationnaires



D'après David (<https://stats.stackexchange.com/users/44449/david>), Stationarity Tests in R, checking mean, variance and covariance, URL (version : 2017-05-23) :  
<https://stats.stackexchange.com/q/182764>

## Rappel : énergie et puissance moyenne d'un signal

|                         | Temps discret                                                       | Temps continu                                                      |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Energie $E_x$           | $\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2$                                | $\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$                              |
| Puissance moyenne $P_x$ | $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N  x[n] ^2$ | $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T  x(t) ^2 dt$ |

- Un signal à énergie finie est à puissance moyenne nulle.
- Un signal à énergie infinie peut être à puissance moyenne finie ou infinie.
- Les **signaux aléatoires** sont traités comme (ou comme limite des) des signaux à **puissance moyenne finie**.

# Moments temporels

- moments temporels  $\neq$  moments statistiques.
- définis par rapport à **une** trajectoire  $x(t, \zeta)$  du processus aléatoire.

La moyenne temporelle (*time average*) est définie

- en temps continu par :

$$\overline{x(t)}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, \zeta) dt,$$

- et en temps discret par :

$$\overline{x[n]}[\zeta] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n, \zeta].$$

- $\bar{x}$  ne dépend pas de  $t$  mais de l'expérience  $\zeta$  considérée.
- en conséquence la moyenne temporelle est elle-même une v.a.
- $\bar{x}$  est définie pour une durée d'observation tendant vers l'infini.
- de ce fait, seule une estimée  $\hat{\bar{x}}$  de cette moyenne est accessible à partir d'un jeu de données expérimentales.

# Ergodicité (1)

- La définition stricte de l'ergodicité relève de concepts abstraits qui ne sont pas abordés dans ce cours.
- De façon approchée, on dit qu'un processus est **ergodique à l'ordre  $k$**  si ses moments temporels d'ordre  $k$  sont indépendants de la trajectoire considérée (à l'ordre 2 : moyenne temporelle et autocorrélation temporelle).
- Si un processus aléatoire est **stationnaire et ergodique** alors les moyennes statistiques sont identiques aux moyennes temporelles à l'ordre  $k$ .
- Cette propriété des processus stationnaires et ergodiques a une forte **importance pratique**. En effet les caractéristiques statistiques d'un processus stationnaire et ergodique peuvent être obtenues à partir d'une seule trajectoire (théoriquement de durée infinie).

## Ergodicité (2)

- Sous les hypothèses de stationnarité et d'ergodisme relativement à la moyenne (ordre 1), l'égalité suivante est respectée :

$$m_X(t) = m_X = \overline{x(t)}(\zeta).$$

- La première égalité découle de l'hypothèse de stationnarité : les moyennes statistiques  $m_X(t)$  sont identiques pour tout  $t$ .
- La seconde égalité, qui traduit l'hypothèse d'ergodicité, implique que les moyennes temporelles  $\overline{x(t)}(\zeta)$  sont identiques pour chaque trajectoire  $\zeta$ .
- Comme la moyenne temporelle est une v.a., l'égalité traduit la convergence de  $\mathbb{E} \left\{ \overline{x(t)}(\zeta) \right\}$  vers  $m_X$  avec une variance tendant vers zéro lorsque  $T$  tend vers l'infini.
- Les notions d'ergodicité et de stationnarité sont toutefois distinctes :
  - un processus stationnaire n'est pas forcément ergodique ;
  - un processus ergodique n'est pas forcément stationnaire.

# Table des matières

## 1 Suite et processus aléatoires

- Définitions et exemples
- Caractérisation d'une suite de variables aléatoires
- Moments statistiques d'un processus aléatoire

## 2 Stationnarité et ergodicité

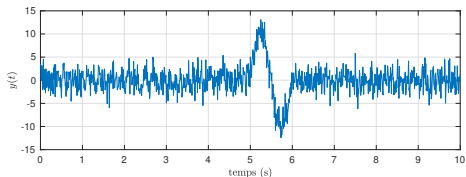
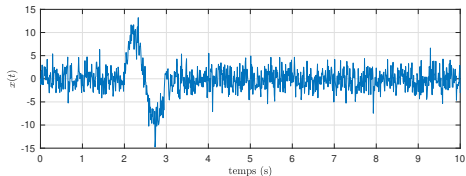
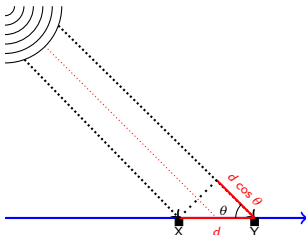
- Définition de la stationnarité
- Définition de la stationnarité
- Comparaison de signaux stationnaires et non stationnaires
- Rappel : énergie et puissance moyenne d'un signal
- Moments temporels
- Ergodicité

## 3 Fonctions de corrélation temporelles

- Fonctions d'intercorrélation temporelle
- Fonctions d'autocorrélation temporelle

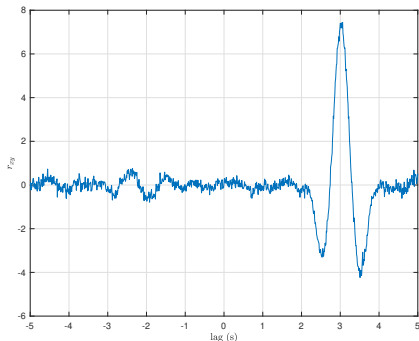
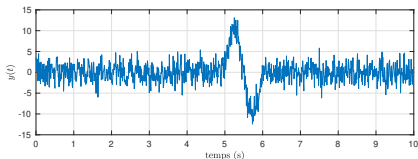
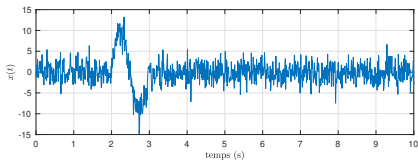
# Fonctions de corrélation temporelles : exemple

- Une source émet une onde qui est réceptionnée par deux capteurs distants X et Y.
- La distance entre les deux capteurs implique un délai de réception différent.



Onde provenant d'une même source réceptionnée sur deux capteurs distants

# Fonctions de corrélation temporelles : exemple



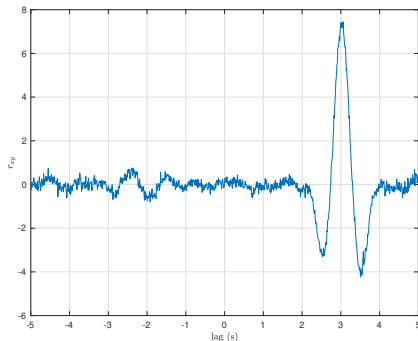
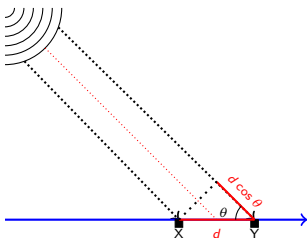
Estimée de la fonction d'intercorrélation temporelle entre les signaux réceptionnés sur deux capteurs distants. L'argument du maximum de la fonction d'intercorrélation donne une estimée de la différence entre les délais de réception.

# Fonctions de corrélation temporelles : exemple

Si l'on suppose que :

- la source est suffisamment éloignée pour considérer que l'onde arrive avec le même angle d'incidence  $\theta$  sur les deux capteurs ;
- les deux capteurs sont éloignés d'une distance  $d$ , ce qui fait que la différence de trajet parcouru par l'onde est donnée par  $d \cos(\theta)$  ;
- l'onde se propage à une vitesse  $v$  ;

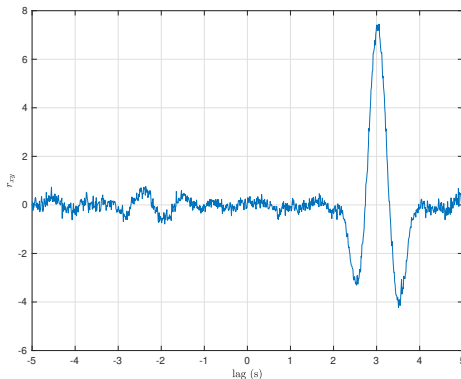
donner une méthode de détermination de l'angle  $\theta$  sachant que  $d$  et  $v$  sont supposés connus (*DOA : direction of arrival*).



# Fonctions de corrélation temporelles : définitions

La notion de fonction de corrélation temporelle est définie pour les signaux déterministes :

- la définition diffère selon que le signal sous analyse est d'énergie finie ou à puissance moyenne finie (énergie infinie) ;
- la trajectoire d'un processus aléatoire correspond à ce dernier cas.



Estimée de la fonction d'intercorrélation temporelle entre les signaux réceptionnés sur deux capteurs distants.

# Fonctions d'intercorrélation temporelle

La fonction d'**intercorrélation temporelle** est définie, pour des signaux à valeurs réelles, par les relations suivantes :

- pour des signaux déterministes à temps continu et à énergie finie :

$$r_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt; \quad (2)$$

- pour des signaux aléatoires à temps continu et à puissance moyenne finie :

$$r_{xy}(\tau, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, \zeta)y(t+\tau, \zeta)dt; \quad (3)$$

- pour des signaux aléatoires à temps discret et à puissance moyenne finie :

$$r_{xy}[k, \zeta] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n, \zeta]y[n+k, \zeta]. \quad (4)$$

## Fonctions d'intercorrélation temporelle : propriétés

- **Ne pas confondre** fonction d'intercorrélation temporelle et **produit de convolution** dont la définition est rappelée en temps continu :

$$[x \star y](\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt,$$
$$r_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau)dt.$$

L'opération de convolution implique, contrairement à l'intercorrélation, un retournement temporel d'un des deux signaux (les deux opérations ne se confondent que pour les signaux symétriques tels que  $y(\tau + t) = y(\tau - t)$ ).

- La fonction d'intercorrélation temporelle possède les propriétés suivantes :
  - ❶ ce n'est pas une fonction paire ;
  - ❷  $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$  ;
  - ❸ la valeur maximale n'est pas forcément obtenue en 0 ;
  - ❹ pour les signaux **stationnaires et ergodiques** à l'ordre 2, la fonction d'intercorrélation statistique est **égale** à la fonction d'intercorrélation temporelle.

# Fonctions d'autocorrélation temporelle

La fonction d'**autocorrélation temporelle** est définie, pour des signaux à valeurs réelles, par les relations suivantes :

- pour des signaux déterministes à temps continu et à énergie finie :

$$r_{xx}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt; \quad (5)$$

- pour des signaux aléatoires à temps continu et à puissance moyenne finie :

$$r_{xx}(\tau, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, \zeta)x(t+\tau, \zeta)dt; \quad (6)$$

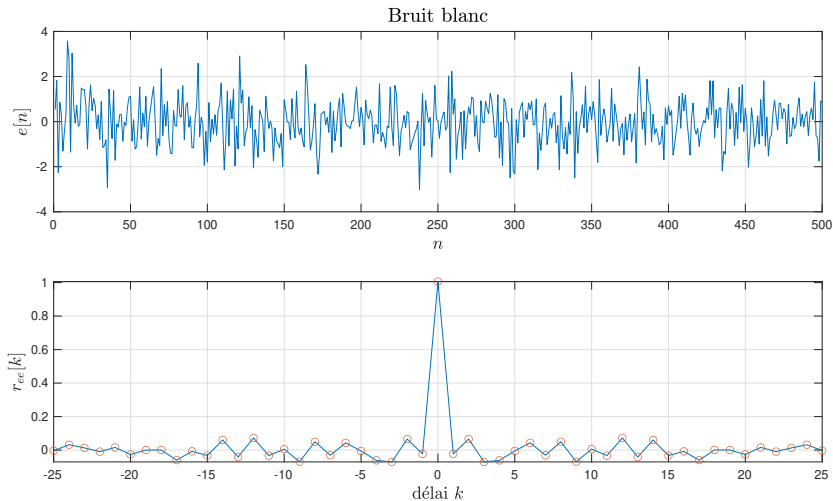
- pour des signaux aléatoires à temps discret et à puissance moyenne finie :

$$r_{xx}[k, \zeta] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n, \zeta]x[n+k, \zeta]. \quad (7)$$

## Fonctions d'autocorrélation temporelle : propriétés

- ① Fonction paire  $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$ .
- ② Valeur maximale est atteinte en  $\tau = 0$ . Cette valeur correspond à la puissance moyenne du signal et est égale selon les cas à :
  - la **valeur quadratique moyenne** de  $x(t)$  :  $r_{xx}(0) = \overline{x^2(t)}$  ;
  - la variance temporelle si le signal est centré :  $r_{xx}(0) = \sigma_X^2$  ;
  - l'unité si le signal est centré réduit :  $r_{xx}(0) = 1$  ;
- ③ Si  $x$  est périodique, sa fonction d'autocorrélation l'est aussi.
- ④ Plusieurs signaux différents peuvent avoir la même fonction d'autocorrélation.
- ⑤ Pour les signaux **stationnaires et ergodiques** à l'ordre 2, la fonction d'autocorrélation statistique est **égale** à la fonction d'autocorrélation temporelle.

# Fonctions d'autocorrélation temporelles : exemple



Trajectoire d'un bruit blanc gaussien et fonction d'autocorrélation temporelle estimée  
( $N = 500$ )