

Modélisation des processus aléatoires

Variables aléatoires

Master Ingénierie des Systèmes Complexes
MISC72.2

E.-H. Djermoune (CRAN, UL, CNRS) el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

10 septembre 2025

Table des matières

1 Signaux déterministes/aléatoires ?

2 Variables aléatoires

- Concept de variable aléatoire (v.a.)
- Fonction de répartition d'une v.a. continue
- Densité de probabilité
- Lien entre densité de probabilité et histogramme
- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire mixte

3 Moments statistiques

- Moyenne statistique ou espérance mathématique
- Variance et autres moments centrés
- Loi normale

4 Vecteurs aléatoires

- Variables aléatoires conjointes
- Indépendance
- Covariance et corrélation

5 Calculs avec les v.a.

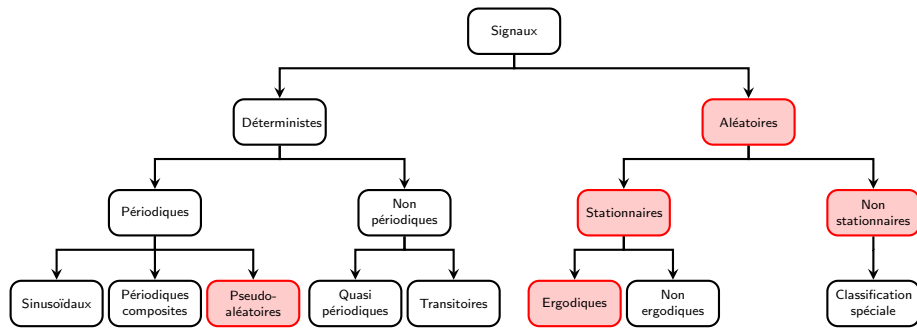
- Somme de variables aléatoires
- Fonction caractéristique
- Fonction d'une variables aléatoire

Signaux déterministes

Un signal (processus, séquence) est dit **déterministe** lorsque sa valeur peut-être déterminée (connue, prédite) sans incertitude à n'importe quel instant.

Exemples :

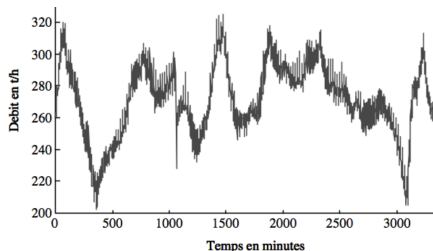
- $x(t) = a \cos(2\pi f_1 t)$
- $x(nT_e) = a \cos(2\pi f_1 nT_e)$, pour un signal échantillonné ;
- $x[n] = x_n = a \cos[2\pi f_1 n]$, pour un signal en temps continu.



Classification des signaux [de Coulon, 1984]

Signaux aléatoires

- Souvent les phénomènes qui donnent naissance aux signaux sont complexes et difficiles à décrire par des modèles physiques.
- Une façon de les modéliser consiste à les considérer comme aléatoires et donc d'utiliser leur description statistique d'où l'appellation classique de « **signaux aléatoires** ».
- **Exemples** : température ambiante, sinusoïde à phase aléatoire, taille d'une file d'attente.
- Il faut bien comprendre que l'appellation classique de signal aléatoire est abusive : lorsque l'on dispose d'un enregistrement numérique d'un « signal aléatoire » ne connaît-on pas exactement la valeur d'un échantillon donné ?
- Les signaux n'ont pas de caractère aléatoire intrinsèque, il ne s'agit que d'un **modèle** commode pour décrire une situation d'incertitude.



Structure du cours

Que faut-il attendre de ce cours ?

... en version courte : une introduction aux processus aléatoires et à leurs représentations

Volume horaire : $5 \times 2\text{h CM/TD (MISC72.2)}$ + **12h TP (MISC703.2)**

Intervenants : El-Hadi Djermoune & Paul Catala

Objectifs

- Savoir modéliser des phénomènes non parfaitement prévisibles
- Comprendre la modélisation d'une série de données par une suite de variables aléatoires
- Comprendre les notions de stationnarité et de non stationnarité
- Assimiler les notions de fonctions de corrélation et de densité spectrale de puissance
- Savoir interpréter les représentations temps-fréquence

Structure

- Variables aléatoires
- Processus et suites (séquences) aléatoires
- Spectres des signaux aléatoires stationnaires
- Représentations temps-fréquences des signaux non-stationnaires

Quelques références bibliographiques

- ① G. Saporta(1990), *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip.
- ② T. Wonnacott et R. Wonnacott (1988), *Statistique*. Economica.
- ③ B. Lacaze, C. Mailhes, M. Maubourguet, J.-Y. Tourneret (1997), *Probabilités et statistique appliquées. Résumé de cours et illustrations*. Cépaduès.
- ④ F. de Coulon (1984), *Théorie et traitement des signaux*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- ⑤ G. Blanchet et M. Charbit (2001), *Signaux et images sous MATLAB[®]*. Hermes Science Publications.
- ⑥ A. Papoulis (1965), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill.
- ⑦ E. T. Jaynes (2003), *Probability theory : the logic of science*. Cambridge University Press.
- ⑧ S. M. Kay (2006), *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB[®]*. Springer.

De nombreux ouvrages sont relatifs à l'usage du logiciel libre R qui est spécialisé en statistique et science des données. Nous utiliserons le logiciel Matlab qui reste adapté au traitement de signaux aléatoires.

Table des matières

1 Signaux déterministes/aléatoires ?

2 Variables aléatoires

- Concept de variable aléatoire (v.a.)
- Fonction de répartition d'une v.a. continue
- Densité de probabilité
- Lien entre densité de probabilité et histogramme
- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire mixte

3 Moments statistiques

- Moyenne statistique ou espérance mathématique
- Variance et autres moments centrés
- Loi normale

4 Vecteurs aléatoires

- Variables aléatoires conjointes
- Indépendance
- Covariance et corrélation

5 Calculs avec les v.a.

- Somme de variables aléatoires
- Fonction caractéristique
- Fonction d'une variables aléatoire

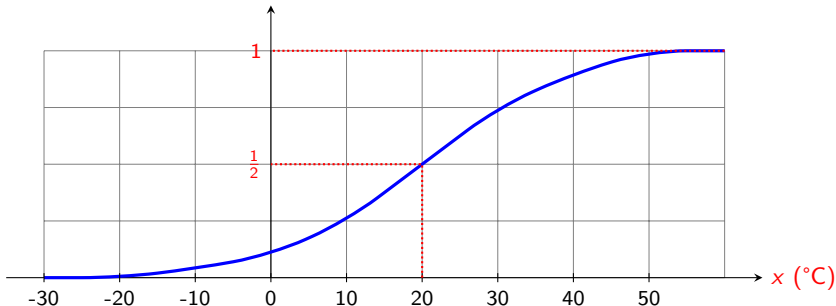
Exemple

- Prenons pour exemple la température T_8 mesurée chaque matin à 8h à la station météo de Nancy.
- Cette température est différente chaque matin :

$$T_8(\text{aujourd'hui}) \neq T_8(\text{hier}) \quad (\text{presque sûrement}).$$

- Essayons de caractériser ce que l'on peut dire de cette température de manière probabiliste (et de considérer, ce faisant, T_8 comme une **variable aléatoire**) :
 - fonction de répartition de la v.a. T_8

$$F_{T_8}(x) = \mathbb{P}(T_8 \leq x)$$

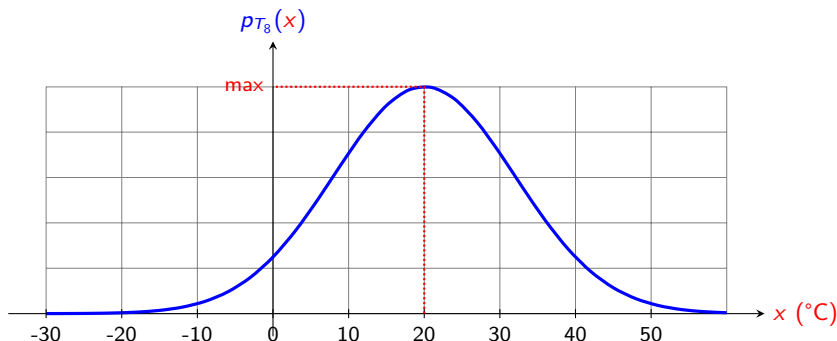


Exemple

- Prenons pour exemple la température T_8 mesurée chaque matin à 8h à la station météo de Nancy.
- Cette température est différente chaque matin :

$$T_8(\text{aujourd'hui}) \neq T_8(\text{hier}) \quad (\text{presque sûrement}).$$

- Essayons de caractériser ce que l'on peut dire de cette température de manière probabiliste (et de considérer, ce faisant, T_8 comme une **variable aléatoire**) :
 - fonction de répartition de la v.a. T_8
 - densité de probabilité de la v.a. T_8



Fonction de répartition

- La v.a. T_8 est continue car x prend une infinité de valeurs sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Pour généraliser, appelons cette variable aléatoire (*random variable*) $X = T_8$ (à ne pas confondre avec la valeur que prend cette variable, notée x).
- La **fonction de répartition** (*distribution function*) d'une variable aléatoire $X(\zeta)$ est l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie¹ par :

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X(\zeta) \leq x), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- **Propriétés :**

- F_X est une fonction positive monotone croissante ;
- $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) = 1$;
- la relation suivante permet de calculer la probabilité de tout intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(a < X(\zeta) \leq b) = \mathbb{P}(X(\zeta) \leq b) - \mathbb{P}(X(\zeta) \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

- toute fonction monotone croissante telle que $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) = 1$ définit une loi de probabilité unique sur $\mathbb{R}$.

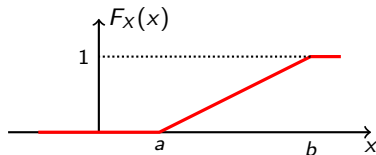
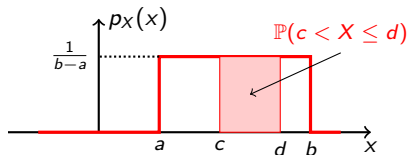
1. Certains auteurs adoptent la définition suivante : $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X(\zeta) < x)$.

Densité de probabilité d'une v.a. continue

Définition

Si $F_X(x)$ est continue et différentiable, la loi de probabilité est caractérisée par une fonction $p_X(x)$ appelée densité de probabilité (*probability density function p.d.f.*) pour X , définie comme dérivée de la fonction de répartition :

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \quad (2)$$



Densité de probabilité et fonction de répartition d'une **loi uniforme**

Densité de probabilité d'une v.a. continue

Propriétés

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1.$
- une densité de probabilité est positive ou nulle mais pas forcément inférieure à 1 (ce n'est donc pas une probabilité et il ne faut pas confondre les notations p et $\mathbb{P}$);

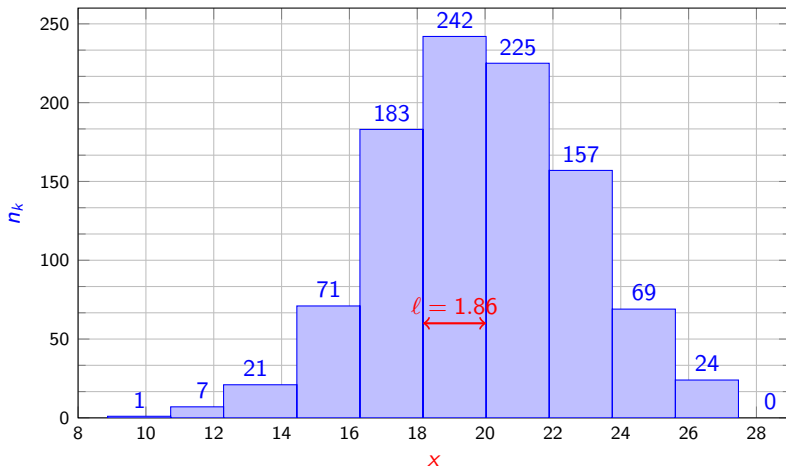
Exercice : représenter une densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[10, 10.5]$.

- permet le calcul de la probabilité pour X d'appartenir à un intervalle :

$$\mathbb{P}(a < X(\zeta) \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p_X(x) dx;$$

- l'événement $X(\zeta) = b$ (ex : $T_8 = 10,000000 \dots ^\circ\text{C}$) a une probabilité nulle quel que soit b . Cette proposition est de **mesure nulle** ou **presqu'impossible**. Cela veut aussi dire que la température relevée ce matin (la réalisation de la v.a. de ce matin) était de probabilité nulle.

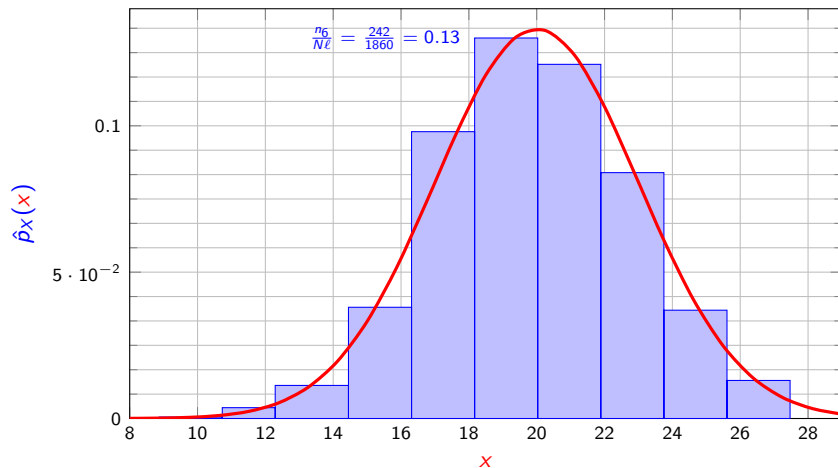
Histogramme : estimer la densité de probabilité à partir des données



Histogramme brut : $N = 1000$ observations ; $M = 10$ classes (intervalles)

Exercice : calculer l'intégrale de cet histogramme.

Histogramme normalisé



Comparaison histogramme normalisé - densité de probabilité théorique : loi normale $\mathcal{N}(20, 3^2)$

Lien entre densité de probabilité et histogramme

- L'histogramme normalisé est un **estimateur de la densité de probabilité**.
- Il partitionne l'intervalle des valeurs observées en M sous-intervalles $\{I_k\}_{k=1}^M$, généralement de même largeur ℓ .
- La densité de probabilité au point x_k , correspondant au milieu de chaque classe I_k , est alors estimée en calculant :

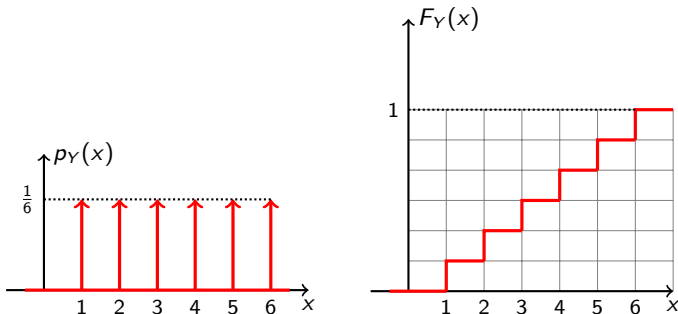
$$\hat{p}_X(x_k) = \frac{n_k}{N\ell},$$

où N est le nombre total d'observations

n_k est le nombre d'observations dans l'intervalle I_k centré autour de x_k .

Variable aléatoire discrète

- Une variable aléatoire discrète ne peut prendre qu'un nombre fini (ou dénombrable) de valeurs.
- Exemple du lancer de dés.



• Propriétés :

- les poids de chaque Dirac, qui sont des probabilités (ex : probabilité de faire un 6 au lancer de dé), sont inférieurs ou égaux à 1 ;
- la somme de tous les poids vaut 1 ;
- la fonction de répartition F_Y est une fonction en escalier continue à droite, monotone croissante de 0 à 1.

Variable aléatoire mixte

- Dans la modélisation de certains problèmes il peut s'avérer utile d'utiliser une loi composite continue-discrète.
- Dans ce cas certaines valeurs de $\mathbb{R}$ ont une probabilité non nulle d'être observées.
- La fonction de répartition F_X présente alors des discontinuités en ces points particuliers et la variation d'amplitude correspond à leur probabilité d'occurrence

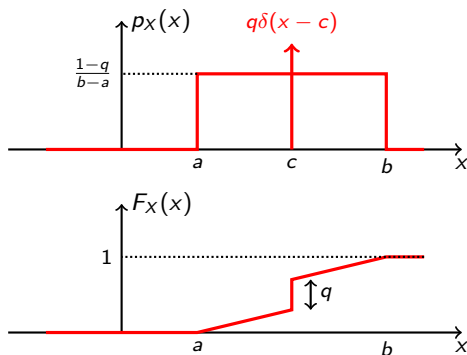


Table des matières

1 Signaux déterministes/aléatoires ?

2 Variables aléatoires

- Concept de variable aléatoire (v.a.)
- Fonction de répartition d'une v.a. continue
- Densité de probabilité
- Lien entre densité de probabilité et histogramme
- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire mixte

3 Moments statistiques

- Moyenne statistique ou espérance mathématique
- Variance et autres moments centrés
- Loi normale

4 Vecteurs aléatoires

- Variables aléatoires conjointes
- Indépendance
- Covariance et corrélation

5 Calculs avec les v.a.

- Somme de variables aléatoires
- Fonction caractéristique
- Fonction d'une variables aléatoire

Espérance mathématique

- Les **moments statistiques** d'une variable aléatoire permettent de caractériser une loi de probabilité par certaines valeurs typiques (valeur centrale, dispersion, asymétrie, aplatissement).
- Pour les applications pratiques on se contente parfois de ces valeurs sans connaître exactement la fonction de répartition.
- Ces moments sont définis en utilisant l'opérateur d'**espérance mathématique** (*expectation operator*) qui, à une fonction $f(X)$, fait correspondre un nombre défini par :

$$\mathbb{E} \{f(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_X(x)dx, \quad (3)$$

pour une v.a. continue X , si l'intégrale converge.

- Les propriétés élémentaires de l'espérance mathématique, découlent des propriétés de l'opérateur d'intégration. Il s'agit d'un opérateur linéaire :

$$\mathbb{E} \{af(X) + bg(Y)\} = a\mathbb{E} \{f(X)\} + b\mathbb{E} \{g(Y)\}.$$

Moment statistique d'ordre 1

La **moyenne statistique** m_X est le moment d'ordre 1 et correspond au centre de gravité de la distribution :

- pour une v.a. continue, si l'intégrale converge

$$m_X = \mathbb{E}\{X\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx. \quad (4)$$

- pour une v.a. discrète :

$$\mathbb{E}\{X\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i). \quad (5)$$

Exercice : pour une distribution uniforme, l'espérance se calcule aisément et correspond au résultat intuitif :

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Moment statistique d'ordre k - moments centrés

- Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire continue est défini, si l'intégrale converge, par :

$$m_k = \mathbb{E} \left\{ X^k \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_X(x) dx. \quad (6)$$

- Le moment centré d'ordre k est défini par :

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left\{ (X - m_X)^k \right\}. \quad (7)$$

- Le moment centré d'ordre 1 est bien évidemment nul.

Moment statistique d'ordre k - moments centrés

- Le moment centré d'ordre 2 est la **variance**, notée σ_X^2 ou $\text{var}\{X\}$, de la distribution et correspond à une caractéristique de dispersion autour de la moyenne :

$$\text{var}\{X\} = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{(X - m_X)^2\right\}. \quad (8)$$

Cette expression peut également s'écrire :

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left\{X^2 - 2Xm_X + m_X^2\right\} \quad (9)$$

$$= \mathbb{E}\left\{X^2\right\} - 2m_X^2 + m_X^2 \quad (10)$$

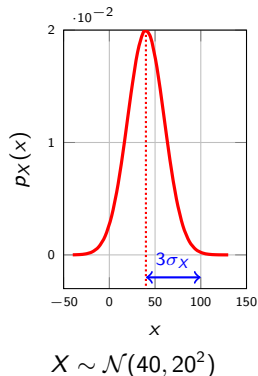
$$= \mathbb{E}\left\{X^2\right\} - m_X^2. \quad (11)$$

- L'**écart-type** σ (*standard deviation*) a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que la variable et sa moyenne.
- v.a. centrée : $X_c = X - m_X$.
- v.a. centrée réduite : $X_{cr} = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$.
- Moment centré d'ordre 3 : coefficient d'asymétrie (*skewness*).
- Moment centré d'ordre 4 : coefficient d'aplatissement, kurtosis.

Densité de probabilité gaussienne

- La loi a été formulée par de Moivre en 1733 puis ses propriétés ont été démontrées par Laplace et Gauss. Pour éviter les querelles d'antériorité, Pearson a introduit la dénomination de **loi normale**.
- Le fait qu'une v.a. X suive une loi normale de moyenne m_X et de variance σ_X^2 est noté $X \sim \mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$, et sa densité s'écrit :

$$p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right)^2\right).$$



$$\mathbb{P}(m_X - \sigma_X < X \leq m_X + \sigma_X) \approx 0.68$$

$$\mathbb{P}(m_X - 1.96\sigma_X < X \leq m_X + 1.96\sigma_X) \approx 0.95$$

$$\mathbb{P}(m_X - 3\sigma_X < X \leq m_X + 3\sigma_X) \approx 0.997$$

Table des matières

1 Signaux déterministes/aléatoires ?

2 Variables aléatoires

- Concept de variable aléatoire (v.a.)
- Fonction de répartition d'une v.a. continue
- Densité de probabilité
- Lien entre densité de probabilité et histogramme
- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire mixte

3 Moments statistiques

- Moyenne statistique ou espérance mathématique
- Variance et autres moments centrés
- Loi normale

4 Vecteurs aléatoires

- Variables aléatoires conjointes
- Indépendance
- Covariance et corrélation

5 Calculs avec les v.a.

- Somme de variables aléatoires
- Fonction caractéristique
- Fonction d'une variables aléatoire

Généralisation : v.a. multidimensionnelle

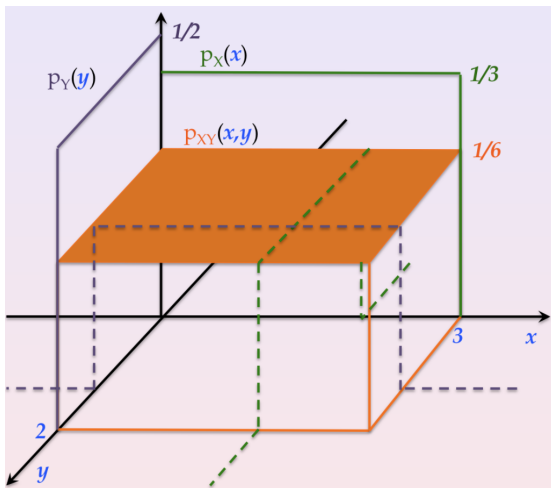
- Il est souvent nécessaire de manipuler simultanément plusieurs variables :
 - température relevée à différents instants ou à différents endroits ;
 - mesure conjointe de la température et de l'hygrométrie, etc.
- Dans ce cas, chaque grandeur peut être modélisée par une v.a., elle-même considérée comme une composante d'un **vecteur aléatoire** (ou variable aléatoire multidimensionnelle).
- Pour faciliter l'accès à ces notions, nous allons considérer cela en dimension 2.
- **Exemple** : couple de variables aléatoires (X, Y) défini par la densité de probabilité (uniforme) suivante :

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} c & \text{pour } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Densité de probabilité de deux v.a. conjointes - lois marginales



Densité de probabilité uniforme pour deux v.a. conjointes X et Y . Lois marginales pour X et pour Y .

Indépendance de deux v.a.

- Les lois marginales s'obtiennent par intégration. Ainsi la densité de probabilité pour X est donnée par :

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dy.$$

- Deux v.a. scalaires X et Y sont dites **indépendantes** si :

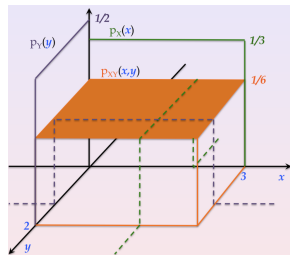
$$\mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y),$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Dans ce cas, la densité de probabilité conjointe est le produit des densités de probabilité marginales (résultat fort utile en pratique) :

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

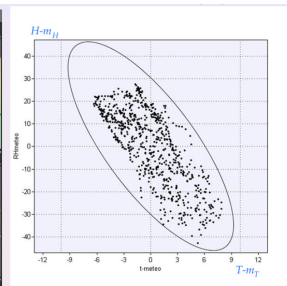
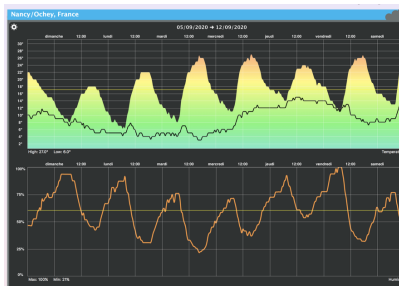
$$\implies \mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{X\}\mathbb{E}\{Y\}$$



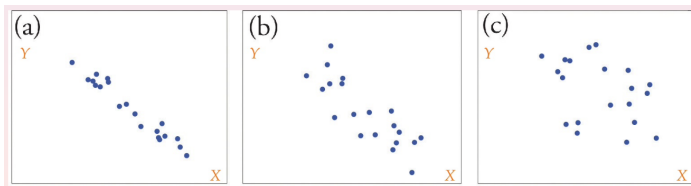
Densité de probabilité uniforme pour deux v.a. conjointes X et Y . Lois marginales pour X et pour Y .

Covariance & corrélation

- Comment quantifier la « ressemblance » entre deux v.a. ?
- **Exemple** : température extérieure (T) et humidité relative (H)



- Un lien plus ou moins fort qu'il faut quantifier



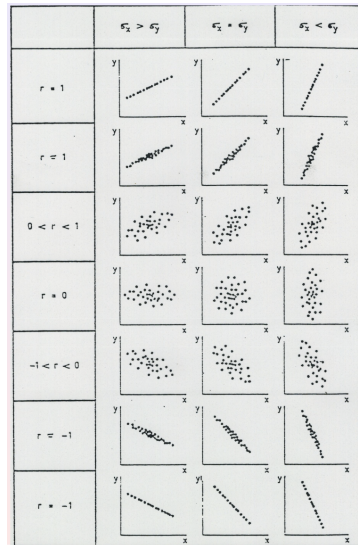
Covariance & corrélation

Corrélation	$E(XY)$	$= \int \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_{XY}(x, y) dx dy$
Covariance (X, Y) Cov (X, Y)	$E[(X - m_X)(Y - m_Y)]$ $= E(XY) - m_X m_Y$	$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ $\Leftrightarrow$ VA non corrélées
Coefficient de corrélation linéaire (Bravais – Pearson)	$E\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$ $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$	$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ Quantifie la dépendance linéaire

Coefficient de corrélation linéaire

- Le **coefficient de corrélation linéaire** ρ_{XY} , couramment utilisé en traitement statistique de données, correspond à une normalisation de la covariance
- Il exprime le degré de dépendance statistique existant entre deux v.a.
- Deux v.a. se ressemblent (au sens d'une correspondance affine) si leur coefficient de corrélation est proche de 1 :

$$|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow Y = \alpha X + \beta.$$



Indépendance $\Rightarrow$ Non corrélation

① Attention au piège terminologique :

- Deux v.a. sont dites **non corrélées** (ou décorrélées) si et seulement si leur **covariance** est nulle :

$$\text{cov}\{X, Y\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{XY} = 0$$

- Il aurait été plus naturel de dire v.a. « non covariées »
- Attention, cela ne veut pas dire que le terme de corrélation $\mathbb{E}\{XY\}$ est nul

② La corrélation de deux v.a. indépendantes s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{XY\} &= \mathbb{E}\{X\} \mathbb{E}\{Y\} \\ \mathbb{E}\{XY\} - \mathbb{E}\{X\} \mathbb{E}\{Y\} &= 0 = \text{cov}\{X, Y\} \end{aligned}$$

Ce résultat implique le fait que deux v.a. indépendantes sont **non corrélées**. Il est important de noter que la **réciroque est fausse** comme l'illustre l'exemple suivant.

Non corrélation $\nRightarrow$ Indépendance

Exemple : soient 2 variables aléatoires X et Y définies par :

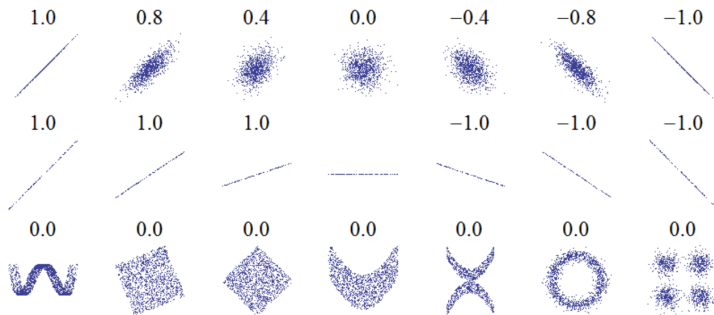
$$X = \cos \Theta, \quad Y = \sin \Theta,$$

où Θ est une v.a. uniformément distribuée entre 0 et 2π .

- Les variables aléatoires X et Y sont non corrélées² car

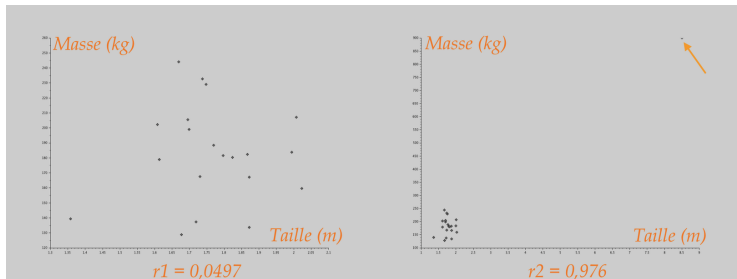
$$\mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{XY\} = 0$$

- mais elles ne sont pas indépendantes. En effet, si X est connue, on peut déduire Y par la relation **non linéaire** $Y^2 = 1 - X^2$.



$$2. \cos \Theta \sin \Theta = \sin(2\Theta)/2.$$

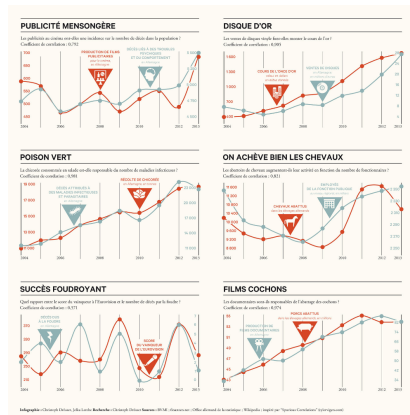
Effet King Kong



Lors d'une analyse de corrélation il faut prendre attention à la présence éventuelle de valeurs éloignées (susceptibles d'être aberrantes).

Confusion corrélation - causalité

- La croissance des tomates dans l'arrière pays méditerranéen est corrélée au nombre de personnes sur les plages.
- Il n'y a pour autant aucune causalité. C'est l'effet d'une variable cachée (l'ensoleillement).



La confusion corrélation - causalité est pourtant fréquente :

- https://en.wikipedia.org/wiki/Correlation_does_not_imply_causation
- https://www.lemonde.fr/les-decodeurs/article/2019/03/01/correlations-ou-causalite-generiez-vos-propres-cartes-pour-ne-rien-demontrer-du-tout_5430063_4355770.html
- <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

Matrice de covariance

- La **matrice de covariance** $\mathbf{C}_X$, qui correspond à la matrice de corrélation $\mathbf{R}_X$ pour un vecteur aléatoire centré, est définie par :

$$\mathbf{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^\top \right\} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \cdots & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

- Elle est liée à la matrice de corrélation par l'expression suivante :

$$\mathbf{C}_X = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{X}\mathbf{X}^\top \right\} - \mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^\top = \mathbf{R}_X - \mathbf{m}_X \mathbf{m}_X^\top.$$

- C'est une matrice carrée de dimension n , symétrique et semi-définie positive.
- Elle est même généralement **définie positive** ($\mathbf{C}_X \succ 0$) ce qui la rend inversible (son déterminant n'est nul que lorsque les v.a. sont linéairement corrélées).
- C'est une matrice **diagonale** dans le cas de variables aléatoires mutuellement non corrélées.

Vecteur aléatoire gaussien

- La densité de probabilité d'un **vecteur gaussien** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ non dégénéré (de matrice de covariance $\mathbf{C}_\mathbf{X}$ inversible) est donnée par :

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\mathbf{m}_{\mathbf{X}}, \mathbf{C}_{\mathbf{X}}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})\mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})^{\top} \right].$$

- Dans le cas où $N = 2$ la matrice de covariance est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \text{var}\{X_1\} & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}\{X_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} \\ \rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

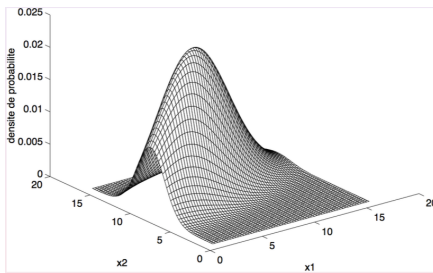
- Si le vecteur n'est pas dégénéré, *i.e.* $|\rho| \neq 1$, alors l'inverse de la matrice de covariance est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_{X_2}^2 & -\rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} \\ -\rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \sigma_{X_1}^2 \end{bmatrix},$$

Vecteur aléatoire gaussien

- d'où l'on déduit l'expression de la densité de probabilité :

$$p_{\mathbf{x}}(x_1, x_2 | m_{x_1}, m_{x_2}, \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_{x_1}} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_{x_1}} \right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_{x_2}} \right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_{x_2}} \right)^2 \right] \right\}.$$



Densité de probabilité gaussienne 2D ($m_1 = 6$, $\sigma_1 = 4$, $m_2 = 10$, $\sigma_2 = 0.5$).

- Deux v.a. gaussiennes non corrélées sont indépendantes. Dans le cas gaussien il y a donc équivalence entre indépendance et non corrélation.

Table des matières

1 Signaux déterministes/aléatoires ?

2 Variables aléatoires

- Concept de variable aléatoire (v.a.)
- Fonction de répartition d'une v.a. continue
- Densité de probabilité
- Lien entre densité de probabilité et histogramme
- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire mixte

3 Moments statistiques

- Moyenne statistique ou espérance mathématique
- Variance et autres moments centrés
- Loi normale

4 Vecteurs aléatoires

- Variables aléatoires conjointes
- Indépendance
- Covariance et corrélation

5 Calculs avec les v.a.

- Somme de variables aléatoires
- Fonction caractéristique
- Fonction d'une variables aléatoire

Somme de variables aléatoires

- Les deux premiers moments d'une combinaison linéaire de v.a. vérifient :

$$\mathbb{E}\{\alpha X + \beta Y\} = \alpha \mathbb{E}\{X\} + \beta \mathbb{E}\{Y\},$$

$$\text{var}\{\alpha X + \beta Y\} = \alpha^2 \text{var}\{X\} + \beta^2 \text{var}\{Y\} + 2\alpha\beta \text{cov}(X, Y).$$

- La densité de probabilité de la somme de v.a. **indépendantes** est donné par le produit de convolution de leurs densités de probabilités :

$$p_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)dx. \quad (14)$$

- Ce produit de convolution devient un produit simple si l'on utilise les transformées de Fourier des densités de probabilité (appelées **fonctions caractéristiques**) :

$$\Phi_{X+Y}(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega). \quad (15)$$

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une v.a. continue X est la transformée de Fourier de sa loi de probabilité, i.e. une fonction de la variable ω :

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} p_X(x) dx = \mathbb{E} \left\{ e^{j\omega X} \right\}. \quad (16)$$

Pour une v.a. discrète prenant n valeurs on obtient :

$$\Phi_X(\omega) = \sum_{i=1}^n e^{j\omega x_i} P_X(x_i).$$

Lorsque x_i est entier, $\Phi_X(\omega)$ correspond à la transformée de Fourier discrète de la suite des probabilités $\{P_X(x_i)\}$. Elle peut alors être calculée aisément à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (fft).

Fonction d'une v.a.

- Dans de nombreux cas pratiques il est nécessaire de considérer une fonction g d'une variable aléatoire X qui correspond à un changement de variable $Y = g(X)$.
- Ces formules de changement de variables sont notamment utiles en simulation dès qu'il s'agit d'engendrer une distribution quelconque à partir d'une distribution uniforme.
- Le problème posé consiste à calculer la fonction de répartition F_Y et la densité de probabilité p_Y pour $Y = g(X)$.
- La difficulté éventuelle est liée à l'inversibilité de g .
- La relation valable pour toute fonction g **bijective** est la suivante :

$$p_Y(y) = \frac{p_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = \frac{p_X(x(y))}{|g'(x(y))|} = \frac{p_X(x(y))}{\left|\frac{dy(x)}{dx}\right|} = p_X(x(y)) \left|\frac{dx(y)}{dy}\right|.$$

g^{-1} est la fonction inverse de g ; g' est la dérivée.