

Modulation, Codage et Théorie de l'Information

Performance des modulations numériques en présence de bruit

El-Hadi Djermoune

9 février 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L2 Sciences Pour l'Ingénieur

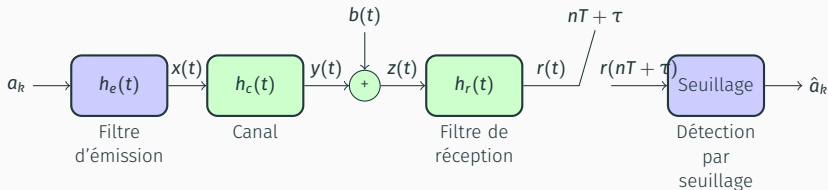
CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Notion de filtre adapté

Transmission sans IES : Canal de Nyquist

Performances d'une transmission sur le canal de Nyquist

Éléments d'une transmission numérique



Notations

On considère ici les modulations numériques décrites par :

$$y(t) = \sum_k a_k h(t - kT), \quad \text{avec } h(t) = h_e(t) \star h_c(t). \quad (1)$$

Le signal reçu est de la forme : $z(t) = y(t) + b(t)$.

Hypothèses :

- $b(t)$: bruit blanc, gaussien, de moyenne nulle et de DSP unilatérale $N_0/2$.
- B : largeur de bande du canal (passe-bas).

Problèmes traités dans ce chapitre

- Choix du filtre de réception $h_r(t)$.
- Choix des instants d'échantillonnage en réception.
- Choix du seuil de détection pour minimiser la probabilité d'erreur.

Nous admettons le résultat fondamental suivant : on peut atteindre le minimum de probabilité d'erreur en effectuant la décision uniquement sur les échantillons prélevés à la cadence T en sortie d'un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est :

$$h_r(t) = h^*(\tau - t) \Leftrightarrow H_r(f) = H^*(f)e^{-j2\pi f\tau}. \quad (2)$$

où τ est tel que $h_r(t) = 0, t < 0$. Ce filtre est appelé **filtre adapté** à $h(t)$ (*matched filter*).

Ce résultat implique que l'on peut remplacer le signal à **temps continu** $r(t)$ par une suite de valeurs à **temps discret** sans perte de performances. L'optimalité est liée au caractère gaussien du bruit. Dans le cas général, l'organe de décision est compliqué et fait appel à l'algorithme de Viterbi. Dans notre cas (simple), la décision va être prise **symbole par symbole**.

Notion de filtre adapté

Transmission sans IES : Canal de Nyquist

Performances d'une transmission sur le canal de Nyquist

Interférences entre symboles

À la sortie du filtre de réception, nous avons :

$$\begin{aligned}r(t) &= z(t) \star h_r(t) = [y(t) + b(t)] \star h_r(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \star h_r(t) + b(t) \star h_r(t) \\&= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(u - kT) h^*(\tau - t + u) du + b(t) \star h_r(t) \\&= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h^*(v - (t - \tau - kT)) dv + \underbrace{b(t) \star h_r(t)}_{e(t)} \\r(t) &= \sum_k a_k p(t - \tau - kT) + e(t)\end{aligned}\tag{3}$$

avec

$$p(t) = h(t) \star h^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h^*(v - t) dv, \quad P(f) = |H(f)|^2\tag{4}$$

Interférences entre symboles

À la sortie du filtre de réception, nous avons :

$$\begin{aligned}r(t) &= z(t) \star h_r(t) = [y(t) + b(t)] \star h_r(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \star h_r(t) + b(t) \star h_r(t) \\&= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(u - kT) h^*(\tau - t + u) du + b(t) \star h_r(t) \\&= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h^*(v - (t - \tau - kT)) dv + \underbrace{b(t) \star h_r(t)}_{e(t)} \\r(t) &= \sum_k a_k p(t - \tau - kT) + e(t)\end{aligned}\tag{3}$$

avec

$$p(t) = h(t) \star h^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h^*(v - t) dv, \quad P(f) = |H(f)|^2\tag{4}$$

Sortie de l'échantillonneur : $t = nT + \tau$

$$r(nT + \tau) = a_n p(0) + \sum_{k \neq n} a_k p((n - k)T) + w_n\tag{5}$$

où w_n est une v.a. telle que $w_n = e(nT + \tau)$.

Dans l'expression du signal reçu $r(nT + \tau)$ apparaît trois termes :

- le premier ($a_n p(0)$) est relatif au symbole transmis à l'instant nT ;
- le second contient la contribution des autres symboles. On l'appelle **interférences entre symboles** (IES) ou *intersymbol interferences* (ISI);
- le troisième est relatif au bruit dans le canal.

Dans l'expression du signal reçu $r(nT + \tau)$ apparaît trois termes :

- le premier ($a_n p(0)$) est relatif au symbole transmis à l'instant nT ;
- le second contient la contribution des autres symboles. On l'appelle **interférences entre symboles** (IES) ou *intersymbol interferences* (ISI);
- le troisième est relatif au bruit dans le canal.

La présence de l'IES ne permet pas d'effectuer une décision symbole par symbole et qui soit au même temps optimale. Une manière de procéder consiste à **annuler les IES**.

Critère de Nyquist

Dans l'expression du signal reçu $r(nT + \tau)$ apparaît trois termes :

- le premier ($a_n p(o)$) est relatif au symbole transmis à l'instant nT ;
- le second contient la contribution des autres symboles. On l'appelle **interférences entre symboles** (IES) ou *intersymbol interferences* (ISI);
- le troisième est relatif au bruit dans le canal.

La présence de l'IES ne permet pas d'effectuer une décision symbole par symbole et qui soit au même temps optimale. Une manière de procéder consiste à **annuler les IES**.

Pour annuler le terme d'IES, il faut vérifier la **condition de Nyquist** :

$$p(mT) = 0, \quad \forall m \neq 0 \quad (6)$$

Le canal correspondant s'appelle le **canal idéal de Nyquist**. Dans le domaine de Fourier, la condition de Nyquist s'exprime par :

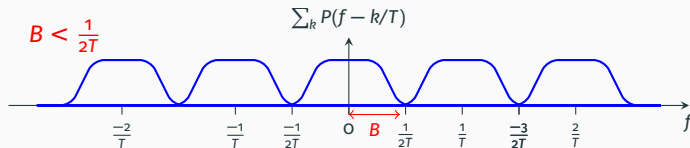
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(f - k/T) = T p(o) = \text{constante} . \quad (7)$$

Puisque B est la bande passante du canal, alors $H_c(f) = 0$ pour $|f| > B$.
 $\Rightarrow H(f) = 0$ et $P(f) = |H(f)|^2 = 0$ pour $|f| > B$.

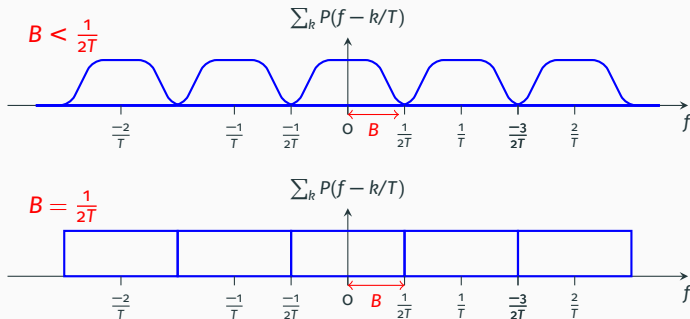
Nous allons considérer les cas suivants :

- $B < 1/2T$
- $B = 1/2T$
- $B > 1/2T$

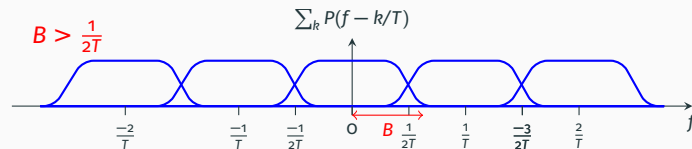
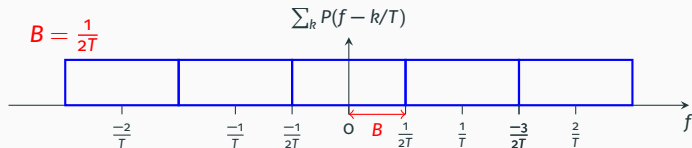
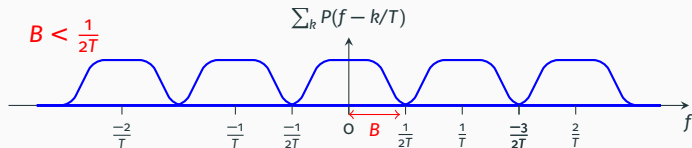
Annulation des interférences



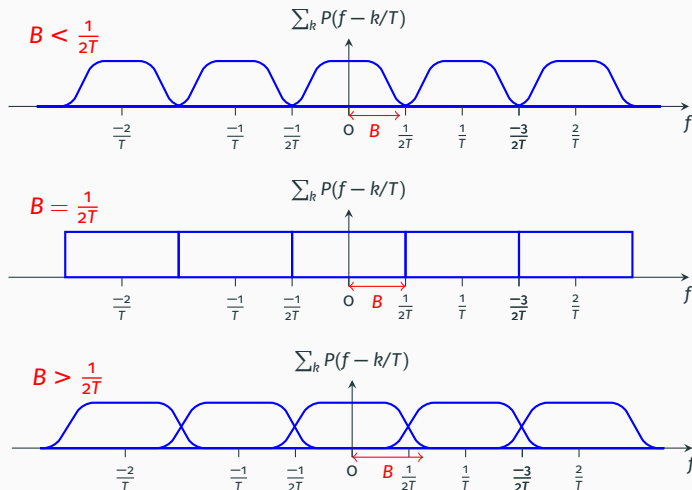
Annulation des interférences



Annulation des interférences



Annulation des interférences



Condition nécessaire d'une transmission sans IES

$$B \geq \frac{1}{2T} \implies R = \frac{1}{T} \leq 2B. \quad (8)$$

Filtre en cosinus surélevé

Une forme largement utilisée pour $P(f)$ est celle des impulsions en **cosinus surélevé** (*raised cosine*) définie dans le domaine fréquentiel par :

$$P_{\alpha}(f) = \begin{cases} T, & \text{pour } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi T}{\alpha} (|f| - 1/2T) \right) \right], & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \text{pour } |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (9)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. Ce terme est appelée **facteur de débordement** (*roll-off*). Plus il est grand, plus la bande en fréquence donnée par :

$$B = \frac{1+\alpha}{2T} \in \left[\frac{1}{2T}, \frac{1}{T} \right] \quad (10)$$

nécessaire pour **transmettre sans IES** est grande.

1. Le filtre d'émission et de réception $h(t)$ est appelé **racine de cosinus surélevé**.

Filtre en cosinus surélevé

Une forme largement utilisée pour $P(f)$ est celle des impulsions en **cosinus surélevé** (*raised cosine*) définie dans le domaine fréquentiel par :

$$P_{\alpha}(f) = \begin{cases} T, & \text{pour } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi T}{\alpha} (|f| - 1/2T) \right) \right], & \text{pour } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & \text{pour } |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (9)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. Ce terme est appelée **facteur de débordement** (*roll-off*). Plus il est grand, plus la bande en fréquence donnée par :

$$B = \frac{1+\alpha}{2T} \in \left[\frac{1}{2T}, \frac{1}{T} \right] \quad (10)$$

nécessaire pour **transmettre sans IES** est grande.

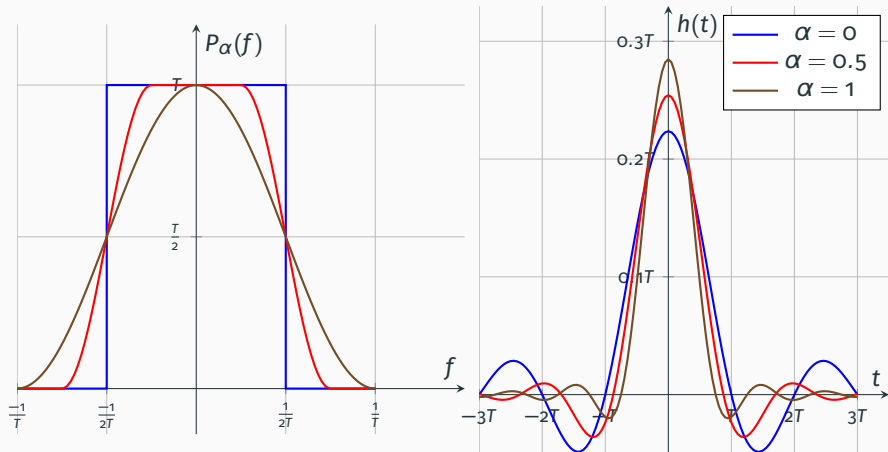
Comme $P(f) = |H(f)|^2$, il suffit de choisir $H(f) = \sqrt{P_{\alpha}(f)}$, ce qui conduit à¹ :

$$h(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos((1+\alpha)\pi t/T) + \frac{T}{4\alpha t} \sin((1-\alpha)\pi t/T)}{1 - (4\alpha t/T)^2} \quad (11)$$

de sorte à ce que $h(t) * h^*(-t) = p_{\alpha}(t)$.

1. Le filtre d'émission et de réception $h(t)$ est appelé **racine de cosinus surélevé**.

Filtre en cosinus surélevé



- $\alpha = 0 \Rightarrow$ filtre passe-bas parfait / diagramme de l'oeil le plus fermé
- $\alpha = 1 \Rightarrow$ bande passante maximale / diagramme de l'oeil le plus ouvert

Diagramme de l'oeil

Pour évaluer la situation de non interférence, un moyen largement utilisé consiste à observer le **diagramme de l'oeil** qui revient à découper le signal reçu en segments de durée $2T$.

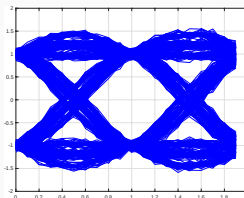
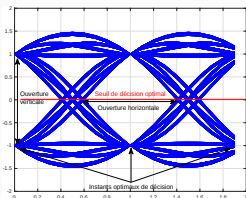


Diagramme pour un filtre en racine de cosinus surélevé et un alphabet $\{+1, -1\}$ ($\alpha = 0.5$).

Sans bruit (figure de gauche); Avec bruit RSB = 25 dB (figure de droite).

- l'**ouverture verticale** mesure les performances contre le bruit. Plus l'oeil est ouvert en hauteur, plus la probabilité d'erreur est faible;
- l'**ouverture horizontale** indique la résistance à un décalage des instants d'échantillonnage. Plus l'oeil est ouvert, plus la probabilité d'erreur est faible. C'est le cas lorsque α augmente.
- L'instant où l'oeil est le plus ouvert est le **meilleur instant d'échantillonnage**, car c'est à cet instant que les deux niveaux sont le plus éloignés.

Notion de filtre adapté

Transmission sans IES : Canal de Nyquist

Performances d'une transmission sur le canal de Nyquist

Hypothèses

- a_k est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{+1, -1\}$ telles que $\mathbb{P}\{a_k = 1\} = \mathbb{P}\{a_k = -1\} = 1/2$;
- $h(t)$ est une fonction réelle telle que $p(t) = h(t) \star h^*(-t)$ vérifie la condition de Nyquist;
- le bruit $b(t)$ est blanc, gaussien, de moyenne 0 et indépendant de a_k .

Hypothèses

- a_k est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{+1, -1\}$ telles que $\mathbb{P}\{a_k = 1\} = \mathbb{P}\{a_k = -1\} = 1/2$;
- $h(t)$ est une fonction réelle telle que $p(t) = h(t) \star h^*(-t)$ vérifie la condition de Nyquist;
- le bruit $b(t)$ est blanc, gaussien, de moyenne 0 et indépendant de a_k .

Nous avons alors :

$$r(nT + \tau) = a_n p(0) + w_n. \quad (12)$$

avec $w_n = e(nT + \tau)$ et $e(t) = b(t) \star h_r(t)$.

Hypothèses

- a_k est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{+1, -1\}$ telles que $\mathbb{P}\{a_k = 1\} = \mathbb{P}\{a_k = -1\} = 1/2$;
- $h(t)$ est une fonction réelle telle que $p(t) = h(t) \star h^*(-t)$ vérifie la condition de Nyquist;
- le bruit $b(t)$ est blanc, gaussien, de moyenne 0 et indépendant de a_k .

Nous avons alors :

$$r(nT + \tau) = a_n p(0) + w_n. \quad (12)$$

avec $w_n = e(nT + \tau)$ et $e(t) = b(t) \star h_r(t)$.

Analyse du processus continu $e(t) = b(t) \star h_r(t)$

- $b(t)$ est gaussien $\Rightarrow e(t)$ est gaussien
- $\mathbb{E}\{b(t)\} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\{e(t)\} = 0$
- $e(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est $b(t)$, donc :

$$S_{ee}(f) = |H_r(f)|^2 S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} P(f). \quad (13)$$

Analyse du processus discret $w_n = e(nT + \tau)$

La fonction d'autocorrélation de $\{w_n\}$ est la TF inverse de $S_{ee}(f)$:

$$\begin{aligned} R_{ww}((n-k)T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ee}(f) e^{j2\pi f(n-k)T} df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) e^{j2\pi f(n-k)T} df = \frac{N_0}{2} p((n-k)T) \\ &= \frac{N_0}{2} p(0) \delta_{k,n} \end{aligned} \quad (14)$$

Par conséquent, w_n est un processus décorrélé et donc indépendant puisque gaussien. On en déduit que la v.a. $r_n = a_n p(0) + w_n$, à la sortie de l'échantillonneur, est **gaussienne** et :

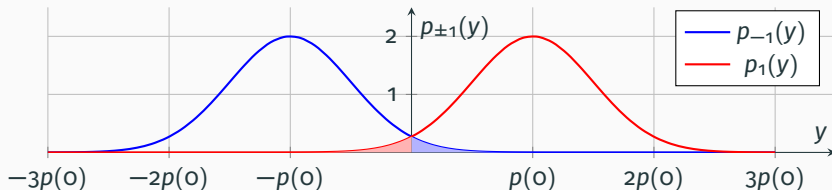
- de moyenne $p(0)$ si $a_n = 1$, et $-p(0)$ si $a_n = -1$;
- de variance $\sigma^2 = \mathbb{E}\{w_n^2\} = \frac{N_0}{2} p(0)$.

Transmission binaire : Décision

Densités de probabilité conditionnelles de la sortie échantillonné r_n

$$p_{r_n|a_n=1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y - p(0))^2}{2\sigma^2}\right) = p_1(y) \quad (15)$$

$$p_{r_n|a_n=-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y + p(0))^2}{2\sigma^2}\right) = p_{-1}(y). \quad (16)$$



Le rôle du détecteur est de décider en faveur de $+1$ ou -1 en utilisant un seuil s :

$$\hat{a}_n = \begin{cases} +1 & \text{si } r_n > s \\ -1 & \text{si } r_n < s. \end{cases} \quad (17)$$

Transmission binaire : Probabilité d'erreur

La décision précédente comporte un risque d'erreur (taux d'erreur bit) donné par :

$$\begin{aligned} P_e &= \mathbb{P}\{a_n = -1\} \cdot \mathbb{P}\{\hat{a}_n = +1 | a_n = -1\} + \mathbb{P}\{a_n = +1\} \cdot \mathbb{P}\{\hat{a}_n = -1 | a_n = +1\} \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}\{r_n > s | a_n = -1\} + \frac{1}{2} \mathbb{P}\{r_n < s | a_n = +1\} \\ &= \frac{1}{2} \int_s^{+\infty} p_{-1}(y) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^s p_1(y) dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Il est clair que le seuil s qui minimise P_e est $s = 0$, d'où :

$$P_e = \int_0^{\infty} p_{-1}(y) dy = \int_{-\infty}^0 p_1(y) dy. \quad (19)$$

Taux d'erreur par bit (TEB)

$$P_e = Q\left(\frac{p(0)}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2p(0)}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \quad (20)$$

où $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ et $E_b = \int |h(t)|^2 dt$ est l'énergie moyenne par bit.

Pour une transmission M -aire, le récepteur optimal est constitué d'un filtre adapté et d'un échantillonneur. Si la condition de Nyquist est vérifiée on obtient aussi :

$$r(nT + \tau) = a_n p(0) + w_n \quad (21)$$

où $a_n \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$. Ici encore on obtient :

$$r_n = a_n p(0) + w_n \quad (22)$$

avec $\mathbb{E}\{a_n\} = 0$ et $\mathbb{E}\{a_n^2\} = (M^2 - 1)/3$. L'étage de décision utilise des seuils situés entre les symboles : $\{0, \pm 2p(0), \pm 4p(0), \dots\}$.

Les performances d'une transmission NRZ M -aire seront traitées en TD...