

Modulation, Codage et Théorie de l'Information

Transmissions numériques en bande de base et sur fréquence porteuse

El-Hadi Djermoune

3 février 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L2 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Hypothèses

Densité spectrale de puissance

Codes en ligne binaires et M -aires

Modulations numériques sur fréquence porteuse

En communications numériques, la source émet un message **discret** : le message prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable, le plus souvent fini, de valeurs.

- Pour que le message soit transmis, il est **transformé par le modulateur en un signal** qui subit **des perturbations** en traversant le canal.
- A la réception, le destinataire tente de **retrouver avec le minimum d'erreurs** la suite des symboles émis (et non pas le signal transmis!).

On distingue deux types de modulations numériques :

1. **la modulation en bande de base** : les signaux émis ne subissent pas de déplacement de leur spectre autour d'une fréquence porteuse. Le modulateur est souvent appelé **codeur en ligne**.
2. **la modulation sur fréquence porteuse** (ou transmission par ondes modulées) : les signaux émis sont de type passe-bande (spectre décalé).

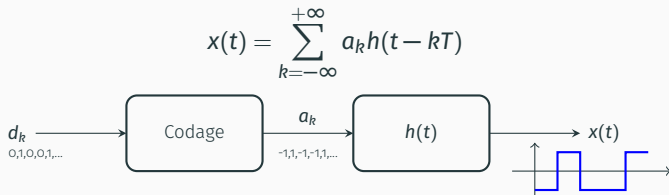
Bien que les principes mis en oeuvre soient les mêmes, nous étudierons d'abord les transmissions en bande de base puis les transmissions par ondes modulées.

Message numérique et signal numérique

- Dans une transmission binaire, on suppose que le message produit par la source est une suite de variables aléatoires $\{d_k\}$ **indépendantes et identiquement distribuées** (i.i.d.) à valeurs dans $\{0, 1\}$, selon la loi uniforme :

$$\mathbb{P}\{d_k = 1\} = \mathbb{P}\{d_k = 0\} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

- La **modulation** associe à la suite des symboles $\{d_k\}$ un signal $x(t)$:



- $h(t)$: impulsion donnant la forme du signal transmis ;
 - a_k : élément de l'alphabet $\mathcal{A} = \{+1, -1\}$ pour une transmission binaire ;
 - T : durée d'un symbole.
- Dans une transmission M -aire, les symboles sont tirés de l'alphabet $\mathcal{A} = \{-(M-1), -(M-3), \dots, -1, +1, \dots, +(M-3), +(M-1)\}$:

$$\mathbb{P}\{d_k = -(M-1)\} = \dots = \mathbb{P}\{d_k = +(M-1)\} = \frac{1}{M}$$

Hypothèses

Densité spectrale de puissance

Codes en ligne binaires et M -aires

Modulations numériques sur fréquence porteuse

Densité spectrale de puissance du signal modulé

Pour une transmission en bande de base, le signal envoyé est de la forme :

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \quad (2)$$

On pose :

$m_a = \mathbb{E} \{a_k\}$ moyenne statistique de a_k

$R_{aa}(n) = \mathbb{E} \{a_k^* a_{k+n}\}$ autocorrélation de a_k

$S_{aa}(n) = \text{TF} \{R_{aa}(n)\}$ DSP de a_k

Formule de Bennett

La formule de Bennett exprime la DSP du signal $x(t)$ en fonction de celle de la séquence a_k et de la forme du filtre $h(t)$:

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T} |H(f)|^2 S_{aa}(f) \quad (3)$$

Densité spectrale de puissance de $x(t)$: Cas particuliers

Cas 1 : a_k processus i.i.d. tel que $m_a = 0$

Si a_k est un processus i.i.d. de moyenne nulle alors $m_a = 0$ et $R_{aa}(n) = \sigma^2 \delta(n)$, d'où $S_{aa}(f) = \sigma^2$ et

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma^2}{T} |H(f)|^2 \quad (4)$$

Cas 2 : a_k processus i.i.d. tel que $m_a \neq 0$

Si a_k est un processus i.i.d. de moyenne non nulle $m_a = \mu$, $R_{aa}(0) = \sigma^2 + \mu^2$ et $R_{aa}(n) = \mu^2$ pour $n \neq 0$, alors

$$S_{aa}(f) = \sigma^2 + \frac{\mu^2}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(f - i/T) \quad (5)$$

et

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{\mu^2}{T^2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |H(i/T)|^2 \delta(f - i/T). \quad (6)$$

Hypothèses

Densité spectrale de puissance

Codes en ligne binaires et M -aires

Modulations numériques sur fréquence porteuse

Les critères principaux pour choisir un code en ligne sont les suivants :

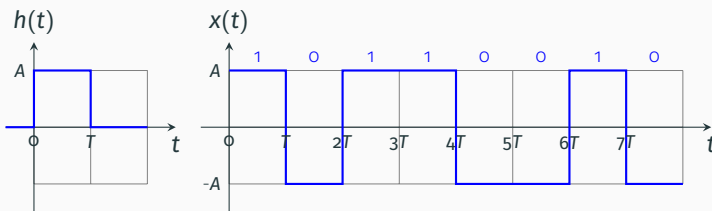
- la densité spectrale de puissance du code (largeur de bande);
- la densité de transitions dans le signal émis (pour la synchronisation);
- la résistance au bruit.

Nous allons voir les codes en ligne les plus usuels et nous étudierons leurs caractéristiques spectrales.

Code non retour à zéro (NRZ)

Soit T la durée d'un symbole :

$$\begin{cases} \text{bit "1"} \rightarrow \text{niveau } +A \text{ pendant la durée } T \\ \text{bit "0"} \rightarrow \text{niveau } -A \text{ pendant la durée } T \end{cases}$$



La fonction $h(t)$ est un signal porte de largeur T et d'amplitude A . Sa TF est :

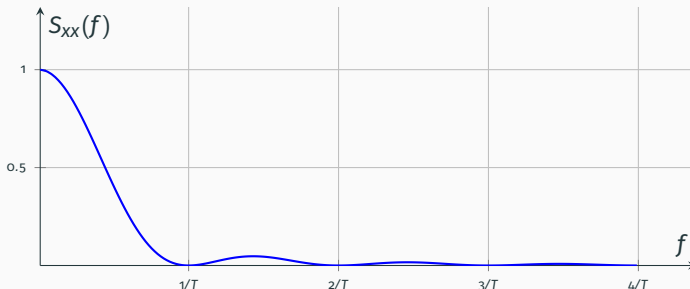
$$H(f) = ATe^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = ATe^{-j\pi fT} \text{sinc}(fT) \quad (7)$$

Code non retour à zéro (NRZ)

Pour le code NRZ, les symboles a_k prennent des valeurs dans $\{-1, +1\}$ et ces valeurs sont équiprobables. Alors $m_a = 0$ et $\sigma^2 = 1$ (à démontrer).

Comme la séquence a_k est i.i.d., on obtient $R_{aa}(n) = \mathbb{E}\{a_k^* a_{k+n}\} = \delta(n)$ et donc $S_{aa}(f) = 1$. D'après la formule de Bennett :

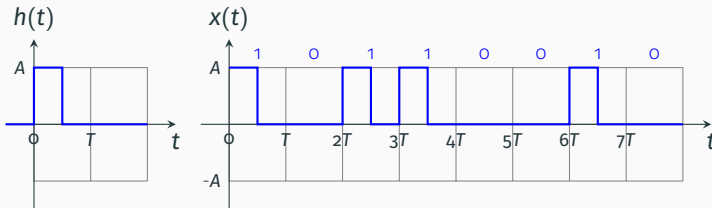
$$S_{xx}(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT) \quad (8)$$



Code retour à zéro (RZ) unipolaire

Soit T la durée d'un symbole :

$$\begin{cases} \text{bit "1"} \rightarrow \text{niveau } +A \text{ pendant } T/2 \text{ puis } 0 \text{ pendant } T/2 \\ \text{bit "0"} \rightarrow \text{niveau } 0 \text{ pendant la durée } T \end{cases}$$



La fonction $h(t)$ est un signal porte de largeur $T/2$ et d'amplitude A . Sa TF est :

$$H(f) = \frac{AT}{2} e^{-j\pi fT/2} \text{sinc}(fT/2) \quad (9)$$

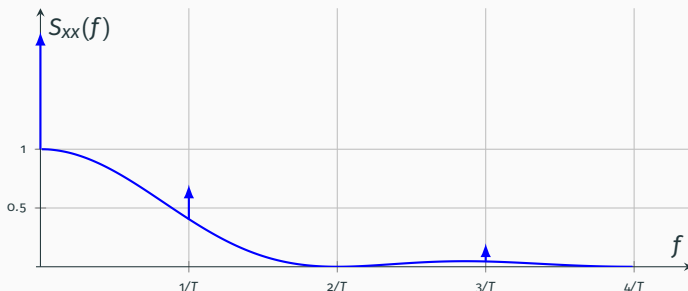
Code retour à zéro (RZ) unipolaire

Les symboles a_k appartiennent à $\{0, 1\}$ et ces valeurs sont équiprobables. Alors (à démontrer) $m_a = 1/2$, $\sigma^2 = 1/4$ et $R_{aa}(n) = m_a^2 + \sigma^2 \delta(n)$. Donc

$$S_{aa}(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(f - i/T). \quad (10)$$

La DSP de $x(t)$ est alors :

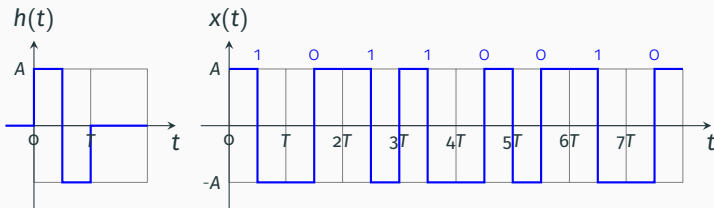
$$S_{xx}(f) = \frac{A^2 T}{16} \text{sinc}^2(fT/2) + \frac{A^2}{16} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(f - i/T) \text{sinc}^2(fT/2). \quad (11)$$



Code biphasé (Manchester)

Soit T la durée d'un symbole :

$$\begin{cases} \text{bit "1"} \rightarrow \text{niveau } +A \text{ pendant } T/2 \text{ puis } -A \text{ pendant } T/2 \\ \text{bit "0"} \rightarrow \text{niveau } -A \text{ pendant } T/2 \text{ puis } +A \text{ pendant } T/2 \end{cases}$$



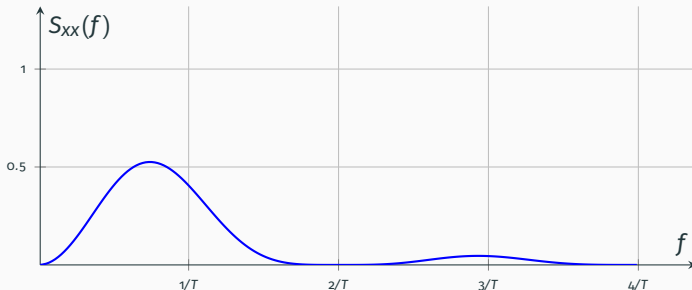
La fonction $h(t)$ est telle que sa TF est donnée par :

$$H(f) = jATe^{-j\pi fT} \text{sinc}(fT/2) \sin(\pi fT/2) \quad (12)$$

Code biphasé (Manchester)

Les symboles a_k appartiennent à $\{-1, +1\}$ et ces valeurs sont équiprobables. D'après le résultat obtenu avec NRZ, nous avons $S_{aa}(f) = 1$ et

$$S_{xx}(f) = A^2 T \sin^2(\pi f T / 2) \operatorname{sinc}^2(f T / 2). \quad (13)$$



Les codes binaires sont surtout utilisés dans les transmissions en bande de base sur paires torsadées, câbles coaxiaux et fibres optiques. Dans ces applications, l'occupation spectrale n'est pas un paramètre trop important.

Nous allons maintenant étudier le code NRZ *M*-aire permettant de transporter plusieurs bits par symbole, ce qui va conduire à l'amélioration de l'efficacité spectrale. Le code NRZ *M*-aire est à la base des modulations en quadrature (QAM) utilisées dans les transmissions sur fréquence porteuse.

Lorsque $M = 2^m$, les bits sont regroupés par paquets de $m = \log_2(M)$ bits et les symboles obtenus sont codés selon l'alphabet :

$$\mathcal{A} = \{-(M-1), -(M-3), \dots, -1, +1, \dots, +(M-3), +(M-1)\}. \quad (14)$$

La relation entre la durée d'un bit et celle d'un symbole s'exprime par :

$$T = T_b \log_2(M) \quad (15)$$

où T_b est la durée d'un bit. M est appelé valence. La vitesse de modulation ou débit symbole, mesuré en *bauds*, s'écrit :

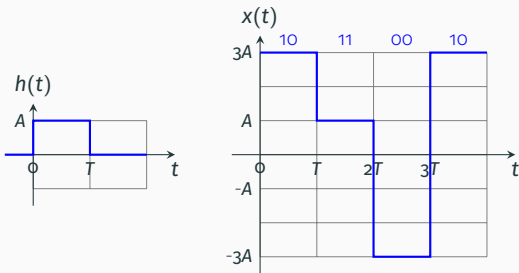
$$R = \frac{1}{T} = \frac{D_b}{\log_2(M)} \quad (16)$$

où D_b est le débit binaire, mesuré en bit/s.

Code NRZ M -aire

Parmi tous les codages possibles qui associent un symbole de m bits de la source à une amplitude de l'alphabet $\mathcal{A}$, le **codage de Gray** est tel que deux symboles d'amplitudes adjacentes sont associées à deux suites de m bits qui ne varient que d'**un seul bit**. Ce choix minimise, à la réception, le taux d'erreur binaire (TEB). Ainsi, le code de Gray pour $M = 4$ donne :

Message	Symbole
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3



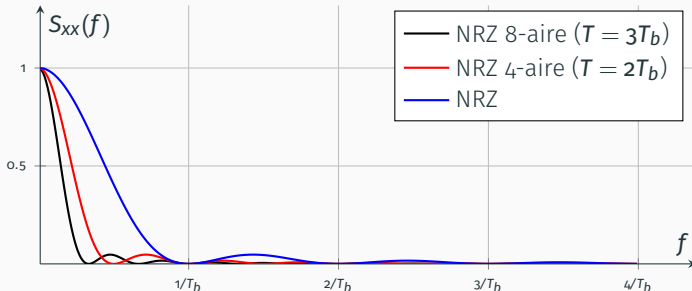
Si les bits sont i.i.d., la séquence des symboles l'est également :

$\mathbb{P}\{a_k = -(M-1)\} = \dots = \mathbb{P}\{a_k = +(M-1)\} = \frac{1}{M}$. On peut montrer que la fonction d'autocorrélation de la séquence $\{a_k\}$ est telle que $R_{aa}(n) = 0$, $\forall n \neq 0$ et :

$$R_{aa}(0) = \sum_{i=1}^M p(a_k(i)) a_k^2(i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i - M - 1)^2 = \frac{M^2 - 1}{3}. \quad (17)$$

Finalement, la DSP du code NRZ M -aire est donnée par :

$$S_{xx}(f) = \frac{A^2 T}{3} (M^2 - 1) \text{sinc}^2(fT). \quad (18)$$



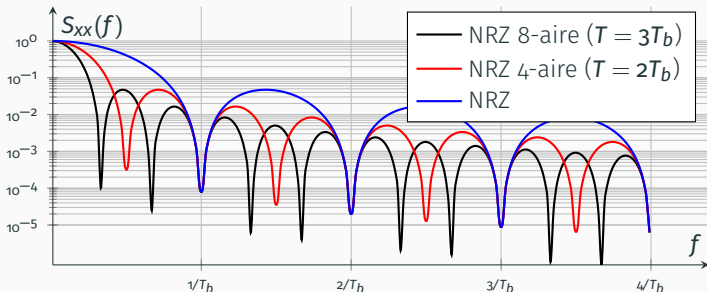
Si les bits sont i.i.d., la séquence des symboles l'est également :

$\mathbb{P}\{a_k = -(M-1)\} = \dots = \mathbb{P}\{a_k = +(M-1)\} = \frac{1}{M}$. On peut montrer que la fonction d'autocorrélation de la séquence $\{a_k\}$ est telle que $R_{aa}(n) = 0$, $\forall n \neq 0$ et :

$$R_{aa}(0) = \sum_{i=1}^M p(a_k(i)) a_k^2(i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (2i - M - 1)^2 = \frac{M^2 - 1}{3}. \quad (17)$$

Finalement, la DSP du code NRZ M -aire est donnée par :

$$S_{xx}(f) = \frac{A^2 T}{3} (M^2 - 1) \text{sinc}^2(fT). \quad (18)$$



Hypothèses

Densité spectrale de puissance

Codes en ligne binaires et M -aires

Modulations numériques sur fréquence porteuse

La modulation sur fréquence porteuse a pour but de générer un signal **passé-bande** : signal réel dont le spectre se situe autour d'une fréquence f_0 avec une largeur de bande $B \ll f_0$.

Dans le domaine des communications, ces signaux sont souvent représentés par :

- leur enveloppe complexe par rapport à f_0 ;
- leurs composantes en quadrature par rapport à f_0 .

Dans cette partie, nous étudierons les **modulations linéaires** suivantes :

- modulation par déplacement d'amplitude ;
- modulation par déplacement de phase ;
- modulation par amplitude en quadrature.

Modulation par déplacement d'amplitude (MDA-M)

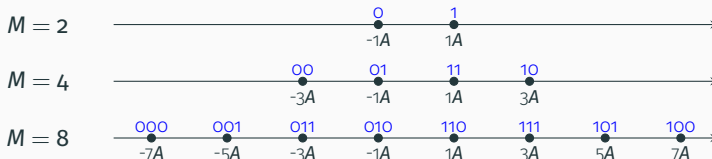
La **modulation par déplacement d'amplitude** ou *pulse amplitude modulation* (PAM) à M états consiste à émettre pendant la durée T d'un symbole a_k une impulsion sinusoïdale dont l'amplitude prend l'une des M valeur de l'alphabet :

$$\mathcal{A} = \{-(M-1), -(M-3), \dots, -1, +1, \dots, +(M-3), +(M-1)\}. \quad (19)$$

Le signal engendré est de la forme :

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t). \quad (20)$$

Les valeurs de l'alphabet peuvent être représentées par des points régulièrement espacés sur un axe. La figure ainsi obtenue s'appelle une constellation.



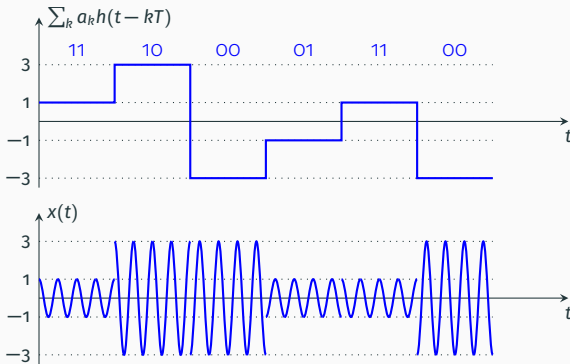
La modulation MDA- M est également appelée *amplitude-shift keying* (ASK).

Modulation par déplacement d'amplitude (MDA-M)

Le signal PAM peut s'écrire sous la forme enveloppe complexe :

$$x(t) = \Re \left\{ \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT)}_{x_I(t)} e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (21)$$

Exemple de signaux PAM ($M = 4$) en bande de base et passe-bande :



Modulation par déplacement d'amplitude (MDA-M)

Nous avons vu que l'enveloppe complexe du signal MDA-M s'écrit :

$$x_l(t) = \sum_k a_k h(t - kT) \quad (22)$$

où $a_k \in \{-(M-1), -(M-3), \dots, +(M-1)\}$. Ce n'est rien d'autre que le signal NRZ M -aire. Sa densité spectrale de puissance s'écrit alors :

$$S_{x_l}(f) = \frac{A^2 T}{3} (M^2 - 1) \text{sinc}^2(fT). \quad (23)$$

Comme $x(t) = \Re\{x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \frac{1}{2} \cos(2\pi f t) x_l(t)$, le spectre du signal numérique $x(t)$ est donc :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{4} [S_{x_l}(f - f_0) + S_{x_l}^*(-f - f_0)]. \quad (24)$$

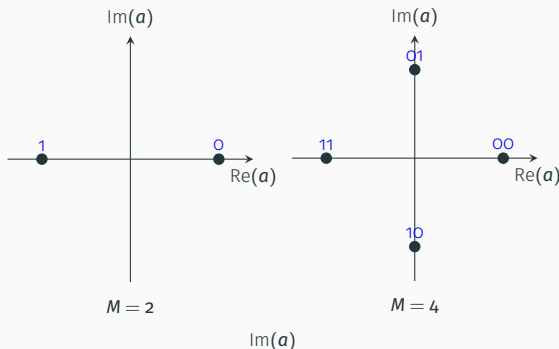
Modulation par déplacement de phase (MDP-M)

La modulation par déplacement de phase ou *phase-shift keying* (PSK) consiste à moduler la phase ϕ_k de la porteuse par les symboles à transmettre :

$$x(t) = \sum_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (25)$$

$$= \sum_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi d_k/M) \quad (26)$$

où $d_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. La constellation PSK est représentée ci-dessous.



Modulation par déplacement de phase (MDP-M)

La représentation par enveloppe complexe du signal PSK s'écrit :

$$x(t) = \sum_k \Re\{h(t - kT)e^{j2\pi f_0 t} e^{j\phi_k}\} \quad (27)$$

$$= \sum_k \Re\{a_k h(t - kT)e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (28)$$

où $a_k = e^{j\phi_k} = e^{j2\pi d_k/M}$. L'enveloppe complexe de $x(t)$ est alors :

$$x_l(t) = \sum_k a_k h(t - kT). \quad (29)$$

On suppose que les symboles d_k forment une suite i.i.d. équiprobable; il en est donc de même pour les a_k . Alors :

$$\mathbb{E}\{a_k\} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{M} e^{j2\pi m/M} = 0 \quad (30)$$

$$R_{aa}(0) = \mathbb{E}\{|a_k|^2\} = 1 \quad (31)$$

$$R_{aa}(n) = \mathbb{E}\{a_k^* a_{k+n}\} = \mathbb{E}\{a_k^*\} \mathbb{E}\{a_{k+n}\} = 0 \text{ pour } n \neq 0. \quad (32)$$

En utilisant la formule de Bennett, la DSP de $x_l(t)$ s'écrit :

$$S_{x_l}(f) = \frac{1}{T} |H(f)|^2. \quad (33)$$

Si $h(t)$ est une fenêtre rectangulaire de largeur T et d'amplitude A , il vient :

$$S_{x_l}(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT). \quad (34)$$

Finalement, le spectre de $x(t)$ s'écrit :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{4} [S_{x_l}(f - f_0) + S_{x_l}(-f - f_0)]. \quad (35)$$

Modulation par amplitude en quadrature (MAQ-M)

La modulation par amplitude en quadrature ou *quadrature amplitude modulation* (QAM) consiste à moduler simultanément l'amplitude et la phase de la porteuse :

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_k a_k^R h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t) - a_k^I h(t - kT) \sin(2\pi f_0 t) \\&= \sum_k \underbrace{\Re\{(a_k^R + ja_k^I) h(t - kT) e^{j2\pi f_0 t}\}}_{a_k} \\&= \sum_k v_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k)\end{aligned}\tag{36}$$

avec $v_k = \sqrt{(a_k^R)^2 + (a_k^I)^2}$ et $\phi_k = \arctan(a_k^I/a_k^R)$.

Cette modulation permet de réaliser des transmissions à haute efficacité spectrale. Si $M = M_1 M_2$, on peut choisir n'importe quelle combinaison avec des modulations ASK- M_1 et PSK- M_2 pour obtenir une constellation ASK-PSK.

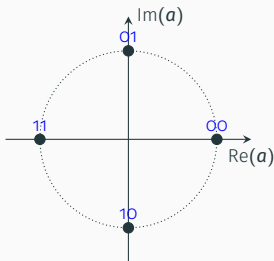
Modulation par amplitude en quadrature (MAQ-M)

La modulation par amplitude en quadrature ou *quadrature amplitude modulation* (QAM) consiste à moduler simultanément l'amplitude et la phase de la porteuse :

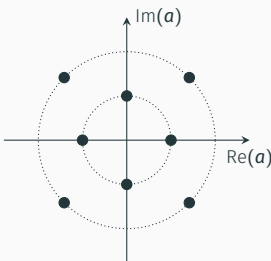
$$x(t) = \sum_k v_k h(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (36)$$

avec $v_k = \sqrt{(a_k^R)^2 + (a_k^I)^2}$ et $\phi_k = \arctan(a_k^I/a_k^R)$.

Cette modulation permet de réaliser des transmissions à haute efficacité spectrale. Si $M = M_1 M_2$, on peut choisir n'importe quelle combinaison avec des modulations ASK- M_1 et PSK- M_2 pour obtenir une constellation ASK-PSK.



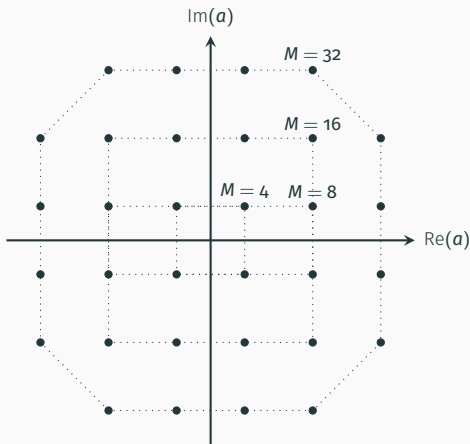
$M = 4$



$M = 8$

Modulation par amplitude en quadrature (MAQ-M)

La position des points de la constellation QAM- M peut être choisie de plusieurs façons. Par exemple, si $M = 2^m$, on peut choisir de positionner les points sur des cercles concentriques. Les **constellations QAM rectangulaires** possèdent l'avantage d'être faciles à générer par deux signaux PAM et, de plus, faciles à démoduler.



Caractéristiques des modulations linéaires

Pour une modulation linéaire invariante dans le temps $x(t) = \sum_k s(t - kT; u_k)$, on définit les paramètres suivants.

1. L'énergie émise pour un symbole u :

$$E(u) = ||s(t; u)||^2. \quad (37)$$

2. L'énergie moyenne par symbole :

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_u E(u). \quad (38)$$

3. L'énergie moyenne par bit :

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2(M)}. \quad (39)$$

4. La distance inter-symboles minimale
(pour quantifier la probabilité
d'erreur) :

$$d_{\min} = \min_{u \neq u'} ||s(u) - s(u')||. \quad (40)$$

