

Modulation, Codage et Théorie de l'Information

Représentation des signaux et systèmes de communication

El-Hadi Djermoune

8 février 2026

Université de Lorraine
Faculté des Sciences et Technologies
L2 Sciences Pour l'Ingénieur

CRAN UL CNRS – département BioSiS
Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage
email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Représentation des signaux

Représentation des systèmes

Quels signaux ?

Les systèmes de communication traitent des signaux de types très différents. Pour bien comprendre le fonctionnement de ces systèmes, il faut des outils d'analyse adaptés.

Classification des signaux de communication

1. déterministes — aléatoires
2. à temps discret — à temps continu
3. analogiques — quantifiés
4. passe-bas — passe-bande
5. à énergie finie — à énergie infinie
6. à puissance moyenne finie — à puissance moyenne infinie ...

Dans cette partie, nous verrons les caractéristiques des signaux et systèmes rencontrés en transmission d'information numérique.

Éléments de théorie du signal : énergie et puissance

Pour les signaux **déterministes à temps continu**, on distingue les **signaux d'énergie finie** servant souvent à modéliser les signaux de durée finie ou à décroissance rapide et les **signaux de puissance moyenne finie** (ex. mélange de sinusoïdes).

Énergie et puissance

L'énergie d'un signal $x(t)$, fonction complexe de la variable réelle t , est la quantité E définie par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1)$$

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ est la quantité P définie par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (2)$$

Propriétés

- $x(t)$ est à énergie finie si $0 < E < +\infty$.
- $x(t)$ est dit à puissance moyenne finie si $0 < P < +\infty$.

Décomposition en série de Fourier

Pour un signal $x(t)$ périodique de période T et de **puissance moyenne finie**, la décomposition en série de Fourier nous dit que :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi nt/T} \quad (3)$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (4)$$

Les coefficients X_n s'appellent **les coefficients de Fourier** du signal $x(t)$.

Transformée de Fourier

Pour un signal d'**énergie finie**, les transformées de Fourier (TF) directe et inverse sont :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (5)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (6)$$

Éléments de théorie du signal : propriétés de la TF

Propriétés	$x(t)$	$X(f)$
Similitude	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Conjugaison	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Translation (décalage temporel)	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Modulation (décalage fréquentiel)	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Produit de convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
Produit	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Dérivation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ $(-j2\pi t)^n x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$ $\frac{d^n X(f)}{df^n}$
Formule de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$		
Intégrale de $x(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(0)$		
Intégrale de $X(f)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = x(0)$		

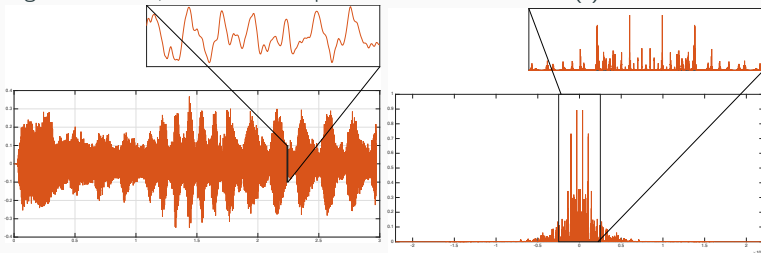
Exemple sonore

Jouer le son

Exemple sonore

Jouer le son

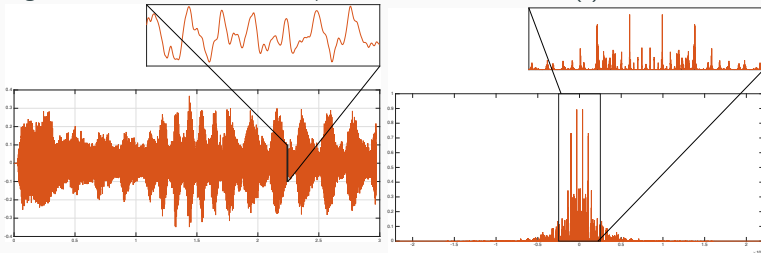
- Signal musical, bande de fréquences de 0 à 22 kHz : $x(t)$



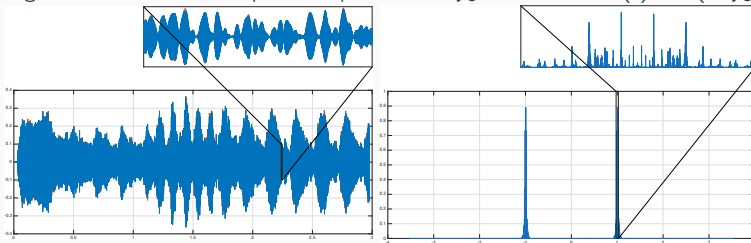
Exemple sonore

Jouer le son

- Signal musical, bande de fréquences de 0 à 22 kHz : $x(t)$



- Signal musical modulé par une porteuse à $f_0 = 100$ kHz : $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$



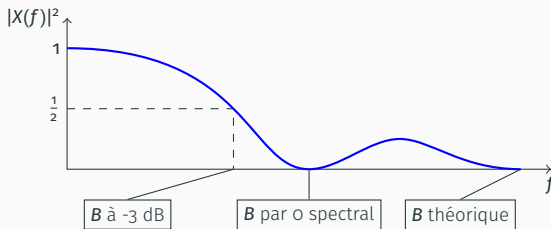
Éléments de théorie du signal : largeur de bande

La **largeur de bande** d'un signal est une **mesure de son contenu spectral** significatif.

Si la TF du signal est nulle pour $|f| > f_0$, alors la largeur de bande est $B = f_0$.

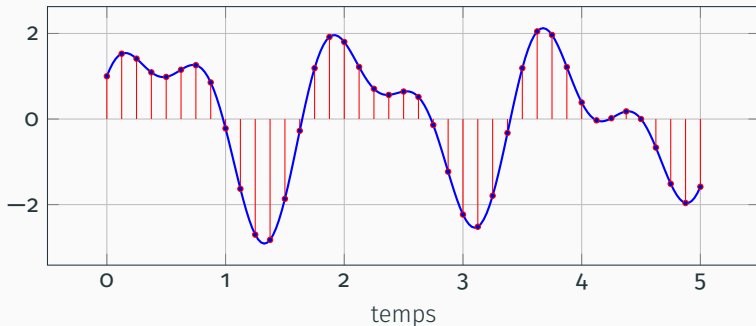
Si la transformée de Fourier n'est pas strictement limitée, la notion de largeur de bande devient floue et plusieurs définitions sont alors possible :

- **B par zéro spectral** : la plus petite fréquence qui annule le spectre ;
- **B à -3 dB** : la fréquence pour laquelle le spectre du signal est exactement égal à la moitié du spectre à la fréquence 0 ;
- **B à α % de l'énergie** : la fréquence à laquelle le spectre accumule α % de l'énergie totale.



Échantillonnage

L'échantillonnage est une opération qui consiste à prélever sur un signal à temps continu une suite de valeurs prises en une suite d'instants t_n , $n \in \mathbb{Z}$. Souvent, l'échantillonnage est régulier, i.e. $t_n = nT_e$ (T_e : période d'échantillonnage).



La question fondamentale est de savoir s'il est possible de reconstruire le signal continue $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$. Le théorème d'échantillonnage montre que, pour les signaux à bande limitée, la reconstruction est possible.

Transformée de Fourier à temps discret (TFtd)

Pour un signal discret $x(n) := x(nT_e)$ d'énergie finie, la transformée de Fourier est définie par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n T_e}, \quad f \in [-F_e/2, F_e/2] \quad (7)$$

$$x(n) = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{+F_e/2} X(f) e^{j2\pi f n T_e} df \quad (8)$$

avec $F_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage.

Variable aléatoire et processus aléatoire

Dans les systèmes de télécommunication, les signaux sont aléatoires :

1. ils sont fonction du temps dans un intervalle de durée finie;
2. ils sont aléatoires, *i.e.* on ne peut pas prédire exactement leur futur.

Ces signaux sont appelés **processus aléatoires (PA)**. Ils sont caractérisés du point de vue statistique.

Un PA est noté $X(t, s)$ où t est le temps (continu ou discret) et $s \in \mathbb{S}$ une variable aléatoire :

- pour s fixé, on obtient une fonction du temps appelée **réalisation** du PA;
- pour $t = t_1$ on obtient une **variable aléatoire** (v.a.), et à un autre instant $t = t_2$ on obtient une autre v.a.

Une variable aléatoire $X \in \mathbb{R}$ est caractérisée par sa **fonction de répartition** $F_X(x)$ ou par sa **densité de probabilité** $p_X(x)$ (d.d.p.) :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (9)$$

La condition de normalisation impose que :

$$F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (10)$$

Variable aléatoire : quelques exemples

Soit X une v.a. continue ou discrète de d.d.p. p_X . On définit l'**espérance mathématique** (moyenne) et la **variance** par :

v.a. continue

$$\mathbb{E}\{X\} = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

$$\text{var}\{X\} = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

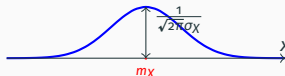
v.a. discrète

$$\mathbb{E}\{X\} = m_X = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

$$\text{var}\{X\} = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_X(x_i)$$

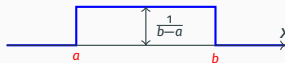
- v.a. gaussienne (ou normale) de moyenne m_X et de variance σ_X^2 ($X \in \mathbb{R}$) :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}$$



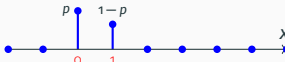
- v.a. uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ ($X \in \mathbb{R}$) :

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- v.a. binaire ($X \in \{0, 1\}$) :

$$\mathbb{P}(X=0) = p, \quad \mathbb{P}(X=1) = 1-p.$$



Un *processus aléatoire* ou une *séquence aléatoire* sont des fonctions ou des suites aléatoires qui dépendent également du temps.

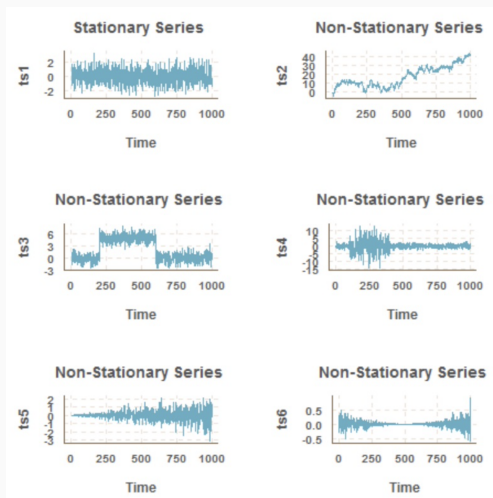
Dans le langage courant, l'adjectif **stationnaire** est souvent utilisé pour qualifier l'évolution de l'état d'une personne ou d'un système.

Stationnarité au sens large

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit **stationnaire au sens large** ou **au sens faible** si :

1. sa moyenne est indépendante de t , i.e. $m_X(t) = \mathbb{E}\{X(t)\} = m_X$;
2. sa fonction d'autocorrélation $R_{XX}(t, \tau) = \mathbb{E}\{X^*(t)X(t + \tau)\} = R_{XX}(\tau)$ ne dépend que du délai τ (et pas de t).

Comparaison de signaux stationnaires et non stationnaires



D'après David (<https://stats.stackexchange.com/users/44449/david>),
Stationarity Tests in R, checking mean, variance and covariance, URL
(version : 2017-05-23) : <https://stats.stackexchange.com/q/182764>

Fonction d'autocorrélation

La **fonction d'autocorrélation** d'un signal $x(t)$ ou $x(n)$ est définie par :

1. pour des signaux déterministes à temps continu et à énergie finie :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (11)$$

2. pour des signal déterministe à temps continu et à puissance finie :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (12)$$

3. pour des signaux aléatoires stationnaires à temps continu :

$$R_{xx}(\tau) = \mathbb{E} \{x^*(t)x(t+\tau)\} \quad (13)$$

4. pour des signaux aléatoires stationnaires à temps discret :

$$R_{xx}(k) = \mathbb{E} \{x^*(n)x(n+k)\} \quad (14)$$

Fonction d'autocorrélation et densité spectrale

Densité spectrale de puissance

La **densité spectrale de puissance** d'un signal ou d'un processus aléatoire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

1. pour un processus à temps continu :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (15)$$

2. pour une séquence à temps discret (de période d'échantillonnage T_e) :

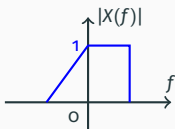
$$S_{xx}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(k) e^{-j2\pi f k T_e} \quad (16)$$

La densité spectrale de puissance est une **quantité positive**. De plus :

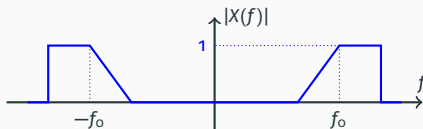
$$P = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad (17)$$

Représentation des signaux passe-bande

- Les signaux issus des modulations en bande de base sont des signaux qui occupent les **basses fréquences** autour de 0 Hz.
- Les signaux issus des modulations sur fréquence porteuse sont des signaux **passe-bande**; leur contenu spectral est concentré dans une bande autour de la fréquence centrale f_0 (cf. figure).
- Objectif : établir une représentation des modulations sur fréquence porteuses qui **dépend uniquement** des modulations en bande de base.



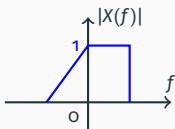
Modulation en bande de base (spectre)



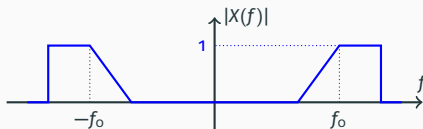
Modulation sur fréquence porteuse (spectre)

Représentation des signaux passe-bande

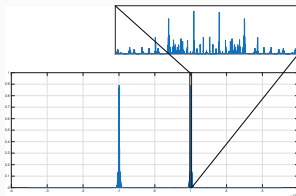
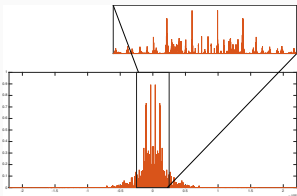
- Les signaux issus des modulations en bande de base sont des signaux qui occupent les **basses fréquences** autour de 0 Hz.
- Les signaux issus des modulations sur fréquence porteuse sont des signaux **passe-bande**; leur contenu spectral est concentré dans une bande autour de la fréquence centrale f_0 (cf. figure).
- Objectif : établir une représentation des modulations sur fréquence porteuses qui **dépend uniquement** des modulations en bande de base.



Modulation en bande de base (spectre)

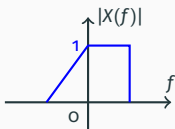


Modulation sur fréquence porteuse (spectre)

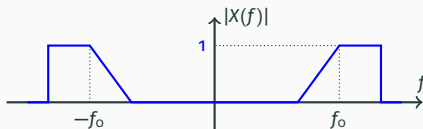


Représentation des signaux passe-bande

- Les signaux issus des modulations en bande de base sont des signaux qui occupent les **basses fréquences** autour de 0 Hz.
- Les signaux issus des modulations sur fréquence porteuse sont des signaux **passe-bande**; leur contenu spectral est concentré dans une bande autour de la fréquence centrale f_0 (cf. figure).
- Objectif : établir une représentation des modulations sur fréquence porteuses qui **dépend uniquement** des modulations en bande de base.



Modulation en bande de base (spectre)



Modulation sur fréquence porteuse (spectre)

Signaux passe-bande

Un signal passe-bande de fréquence centrale f_0 peut être représenté :

1. soit par son **enveloppe complexe** par rapport à f_0
2. ou par ses **composantes en phase et en quadrature** par rapport à f_0

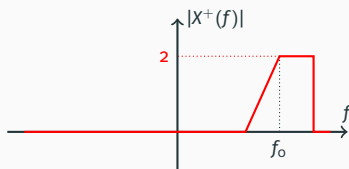
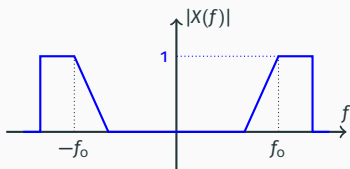
Représentation des signaux passe-bande : définitions

Suppression des fréquences négatives de $x(t)$

Le filtrage linéaire qui supprime les fréquences négatives du signal réel $x(t)$ aboutit au signal complexe, noté $x^+(t)$, dont la partie réelle est $x(t)$:

$$x(t) = \Re\{x^+(t)\}, \quad x^+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

où $\hat{x}(t)$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$.



Représentation des signaux passe-bande : définitions

Suppression des fréquences négatives de $x(t)$

Le filtrage linéaire qui supprime les fréquences négatives du signal réel $x(t)$ aboutit au signal complexe, noté $x^+(t)$, dont la partie réelle est $x(t)$:

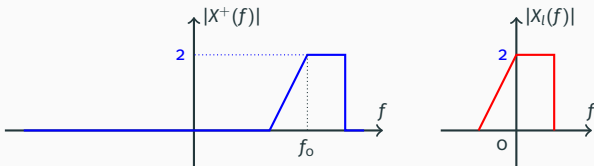
$$x(t) = \Re\{x^+(t)\}, \quad x^+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

où $\hat{x}(t)$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$.

Enveloppe complexe

On appelle **enveloppe complexe** du signal $x(t)$ par rapport à la fréquence f_0 le signal $x_I(t)$ tel que :

$$x_I(t) = x^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$



Représentation des signaux passe-bande : définitions

Suppression des fréquences négatives de $x(t)$

Le filtrage linéaire qui supprime les fréquences négatives du signal réel $x(t)$ aboutit au signal complexe, noté $x^+(t)$, dont la partie réelle est $x(t)$:

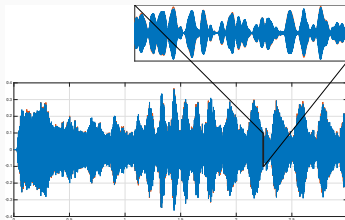
$$x(t) = \Re\{x^+(t)\}, \quad x^+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

où $\hat{x}(t)$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$.

Enveloppe complexe

On appelle **enveloppe complexe** du signal $x(t)$ par rapport à la fréquence f_0 le signal $x_I(t)$ tel que :

$$x_I(t) = x^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$



$x(t)$ $x_I(t)$

Représentation des signaux passe-bande : définitions

Suppression des fréquences négatives de $x(t)$

Le filtrage linéaire qui supprime les fréquences négatives du signal réel $x(t)$ aboutit au signal complexe, noté $x^+(t)$, dont la partie réelle est $x(t)$:

$$x(t) = \Re\{x^+(t)\}, \quad x^+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

où $\hat{x}(t)$ est la transformée de Hilbert de $x(t)$.

Enveloppe complexe

On appelle **enveloppe complexe** du signal $x(t)$ par rapport à la fréquence f_0 le signal $x_I(t)$ tel que :

$$x_I(t) = x^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

Composantes en phase et en quadrature

Les composantes en **phase** $r(t)$ et en **quadrature** $i(t)$ du signal $x(t)$ par rapport à f_0 sont :

$$r(t) = \Re\{x_I(t)\}$$

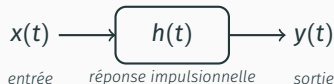
$$i(t) = \Im\{x_I(t)\}$$

Représentation des signaux

Représentation des systèmes

Système

Un système est un dispositif qui produit un signal de sortie (**réponse**) en régissant à un signal d'entrée (**excitation**).



- Un système qui vérifie le principe de superposition est dit **linéaire**.
- On appelle **réponse impulsionnelle** d'un système le signal de sortie du système lorsqu'il est excité par une impulsion de Dirac.
- Un système est **invariant** dans le temps si sa réponse impulsionnelle est la même quelque soit l'instant d'application de l'impulsion.
- Un système linéaire invariant (SLI) est complètement caractérisé par sa **réponse impulsionnelle** $h(t)$, i.e. sa réponse à n'importe quel signal d'entrée se calcule par **produit de convolution** entre $x(t)$ et $h(t)$:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (18)$$