

Analyse de données et apprentissage

Estimation fréquentielle par la méthode de Prony

El-Hadi Djermoune

9 février 2026

Université de Lorraine

Faculté des Sciences et Technologies

M1 Ingénierie de Systèmes Complexes

CRAN UL CNRS – département BioSiS

Bureau: 422, Bât. Henri Poincaré 4^e étage

email: el-hadi.djermoune@univ-lorraine.fr

Introduction

Modèle exponentiel complexe

Méthode de Prony

Améliorations de la méthode de Prony

Moindres carrés

Décomposition en valeurs singulières

Méthode de Prony

- Développée en 1795 par le Baron de Prony : elle s'appuie sur un **modèle** sinusoïdal ou, plus généralement, sur un **modèle exponentiel complexe** (combinaison linéaire de fonctions exponentielles).
- Contrairement à la transformée de Fourier, **la méthode de Prony est un estimateur fréquentiel et paramétrique** : il donne directement accès aux fréquences qui composent le signal et aux paramètres associés (amplitude, phase, facteur d'amortissement).
- Elle est très efficace, **sa résolution fréquentielle n'est pas limitée par le nombre d'échantillons** mais uniquement par la puissance du bruit.
- **En l'absence de bruit, la résolution de la méthode de Prony est illimitée.**
- Rappelons que le périodogramme a une résolution fréquentielle bornée par l'inverse du nombre d'échantillon : $\Delta f < \frac{1}{N}$.

Objectifs du chapitre

- Comprendre l'apport d'un modèle paramétrique en analyse spectrale.
- Savoir utiliser la méthode de Prony et ses variantes.

Introduction

Modèle exponentiel complexe

Méthode de Prony

Améliorations de la méthode de Prony

Moindres carrés

Décomposition en valeurs singulières

Fonction exponentielle complexe : rappel

Signal à temps continu composé d'une exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}x(t) &= \underbrace{A \cdot e^{j\phi}}_h \cdot \underbrace{e^{(\alpha+j\omega)t}}_{z^t} = h z^t \\ &= A e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) + j A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$: facteur d'amortissement (en sec^{-1}), $\alpha = \ln(|z|)$

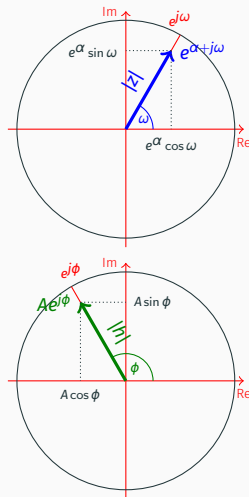
$\omega \in \mathbb{R}$: pulsation (en rad/sec), $\omega = 2\pi f = \arg(z)$

$A \in \mathbb{R}$: amplitude, $A = |h|$

$\phi \in \mathbb{R}$: phase (en rad), $\phi = \arg(h)$

$z \in \mathbb{C}$: mode $z = e^{\alpha+j\omega}$

$h \in \mathbb{C}$: amplitude complexe $h = A e^{j\phi}$.



Modèle paramétrique du signal à temps discret

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{i=1}^M \underbrace{A_i \exp(j\phi_i)}_{h_i} \cdot \underbrace{\exp[(\alpha_i + j2\pi f_i)n]}_{z_i^n} + \underbrace{e(n)}_{\text{bruit}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{i=1}^M h_i z_i^n + e(n) \end{aligned}$$

- le signal $x(n)$ est constitué de **M exponentielles complexes**;
- chaque exponentielle complexe i est caractérisée par **4 paramètres réels** : la fréquence f_i , le facteur d'amortissement α_i , l'amplitude A_i et la phase ϕ_i ;
- chaque exponentielle complexe i est caractérisée par **2 paramètres complexes** : le mode z_i et l'amplitude complexe h_i ;
- les N mesures sont entachées d'**erreurs de modélisation** et/ou de **bruits** $e(n)$;
- les **modes sont tous distincts**, i.e. $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$.

Le modèle sinusoïdal

Un signal constitué de L sinusoïdes réelles peut être ramené à un modèle exponentiel complexe :

$$\begin{aligned}x(n) &= \sum_{i=1}^L A_i e^{\alpha_i n} \cos(2\pi f_i n + \phi_i) = \sum_{i=1}^L A_i e^{\alpha_i n} \frac{e^{j(2\pi f_i n + \phi_i)} + e^{-j(2\pi f_i n + \phi_i)}}{2} \\&= \sum_{i=1}^L \underbrace{\frac{1}{2} A_i e^{j\phi_i}}_{a_i} \underbrace{e^{(\alpha_i + 2\pi f_i)n}}_{b_i^n} + \sum_{i=1}^L \underbrace{\frac{1}{2} A_i e^{-j\phi_i}}_{a_i^*} \underbrace{e^{(\alpha_i - 2\pi f_i)n}}_{b_i^{*n}} \\&= \sum_{i=1}^L a_i b_i^n + \sum_{i=1}^L a_i^* b_i^{*n} = \sum_{i=1}^{M=2L} h_i z_i^n, \quad z = \{b_1, \dots, b_L, b_1^*, \dots, b_L^*\}.\end{aligned}$$

- Un signal composé de L sinusoïdes réelles peut être représenté par $M = 2L$ exponentielles complexes. Ces exponentielles sont conjuguées 2 à 2, leurs amplitudes également : $\forall i \in \{1, \dots, M\}, \exists j$ tel que $z_j = z_i^*$ et $h_j = h_i^*$.
- **Cas particulier :** une sinusoïde de fréquence nulle (composante continue) peut être représentée par une seule exponentielle complexe.

Position du problème

- Etant données N mesures d'un signal composé de M exponentielle complexes, quels sont les valeurs des $2M$ paramètres z_i et h_i du modèle?

$$x(n) = \sum_{i=1}^M h_i z_i^n + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

- L'estimation simultanée des h_i et z_i n'est pas un problème facile car le modèle est non linéaire par rapport à ces paramètres.

Estimation des paramètres du modèle : où réside la difficulté ?

Estimation par la méthode des moindres carrés

- On pose $z = [z_1, z_2, \dots, z_M]^T$, $h = [h_1, h_2, \dots, h_M]^T$ et :

$$x = Zh + e, \quad x = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad Z = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de Vandermonde}}.$$

- Critère des moindres carrés. On pose $(\cdot)^H = (\cdot)^*{}^T$:

$$J(z, h) = \|x - Zh\|_2^2 = (x^H - Z^H h^H)(x - Zh) = x^H x - x^H Zh - h^H Z^H x + h^H Z^H Zh.$$

- Minimisation (linéaire par rapport à h , non linéaire par rapport à z) :

$$\frac{\partial J}{\partial h} = 0 \Rightarrow \hat{h} = (Z^H Z)^{-1} Z^H x, \quad (\text{solution explicite si } Z \text{ connu})$$

$$\frac{\partial J}{\partial z_1} = 0 \Rightarrow -x^H \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ (N-1)z_1^{N-2} \end{bmatrix} + h^H Z^H \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ (N-1)z_1^{N-2} \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{solution itérative})$$

Introduction

Modèle exponentiel complexe

Méthode de Prony

Améliorations de la méthode de Prony

Moindres carrés

Décomposition en valeurs singulières

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

Constat

La méthode de Prony repose sur la propriété suivante : tout signal $x(n)$ composé de M exponentielles complexes et sans bruit¹ est solution d'une équation récurrente d'ordre M à coefficients constants a_i :

$$x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_M x(n-M) = 0 \iff x(n) + \sum_{i=1}^M a_i x(n-i) = 0, \quad (2)$$

dont le polynôme caractéristique² a comme racines les modes z_i :

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M} = 1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i} = \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1}). \quad (3)$$

Preuve : cf. polycopié de cours.

1. i.e. $e(n) = 0$.

2. Les coefficients du polynôme caractéristique sont les mêmes que l'équation récurrente.

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

Etapes de l'algorithme de Prony

On dispose de N mesures $x(n)$ et on suppose que $e(n) = 0$ et $N \geq M$.

1. En utilisant l'équation (2), on forme un système de M équations linéaires pour calculer les inconnues $\{a_i\}$, $i = 1, \dots, M$:

$$\begin{cases} x(M) + a_1x(M-1) + \dots + a_Mx(0) = 0 & \text{pour } n = M \\ x(M+1) + a_1x(M) + \dots + a_Mx(1) = 0 & \text{pour } n = M+1 \\ \vdots & \vdots \\ x(2M-1) + a_1x(2M-2) + \dots + a_Mx(M-1) = 0 & \text{pour } n = 2M-1 \end{cases}$$

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

Etapes de l'algorithme de Prony

On dispose de N mesures $x(n)$ et on suppose que $e(n) = 0$ et $N \geq M$.

1. En utilisant l'équation (2), on forme un système de M équations linéaires pour calculer les inconnues $\{a_i\}, i = 1, \dots, M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \cdots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x(2M-2) & x(2M-3) & \cdots & x(M-1) \end{bmatrix}}_{Y : \text{matrice Toeplitz}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a = - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix}}_y$$

$$Y \cdot a = -y \Rightarrow a = -Y^{-1}y. \quad (4)$$

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

Etapes de l'algorithme de Prony

On dispose de N mesures $x(n)$ et on suppose que $e(n) = 0$ et $N \geq M$.

1. En utilisant l'équation (2), on forme un système de M équations linéaires pour calculer les inconnues $\{a_i\}, i = 1, \dots, M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \cdots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x(2M-2) & x(2M-3) & \cdots & x(M-1) \end{bmatrix}}_{Y : \text{matrice Toeplitz}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a = - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix}}_y$$

$$Y \cdot a = -y \Rightarrow a = -Y^{-1}y. \quad (4)$$

2. On calcule les racines z_i du polynôme $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}$ ou de $B(z) = z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_M$.

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

Etapes de l'algorithme de Prony

On dispose de N mesures $x(n)$ et on suppose que $e(n) = 0$ et $N \geq M$.

1. En utilisant l'équation (2), on forme un système de M équations linéaires pour calculer les inconnues $\{a_i\}, i = 1, \dots, M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \cdots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(2M-2) & x(2M-3) & \cdots & x(M-1) \end{bmatrix}}_{Y : \text{matrice Toeplitz}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a = - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(2M-1) \end{bmatrix}}_y$$

$$Y \cdot a = -y \Rightarrow a = -Y^{-1}y. \quad (4)$$

2. On calcule les racines z_i du polynôme $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}$ ou de $B(z) = z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_M$.
3. On détermine les amplitudes h_i en résolvant un système d'équations linéaires construit avec l'équation (1), ($x = [x(0), \dots, x(M-1)]^T$ et $Z =$ matrice carrée) :

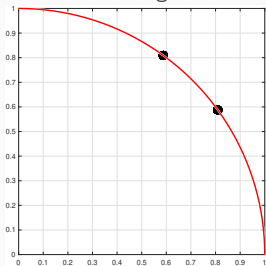
$$Z \cdot h = x \Rightarrow h = Z^{-1}x \quad (5)$$

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

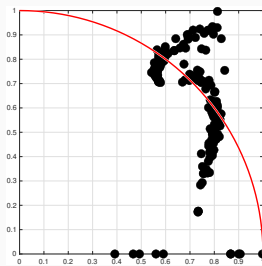
- La méthode de Prony ne nécessite que $2M$ échantillons pour obtenir les paramètres d'un signal contenant M exponentielles complexes.
- Elle fournit des résultats exacts (en théorie) si le signal n'est pas bruité.

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

- La méthode de Prony ne nécessite que $2M$ échantillons pour obtenir les paramètres d'un signal contenant M exponentielles complexes.
- Elle fournit des résultats exacts (en théorie) si le signal n'est pas bruité.
- En pratique, l'estimation des modes z_i est très sensible au bruit : un faible bruit engendre de grandes déviations des valeurs estimées $\hat{z}_i$.



(1) RSB = ∞

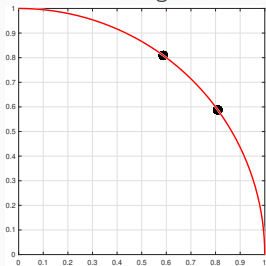


(2) RSB = 60 dB

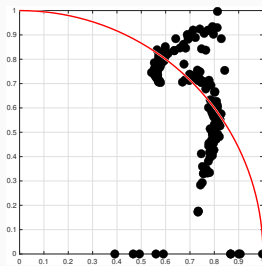
[Prony] Signal avec 2 sinusôides réelles ($M = 4$) de fréquences $\{0.1, 0.15\}$ et $N = 20$

Estimation des paramètres du modèle : méthode de Prony

- La méthode de Prony ne nécessite que $2M$ échantillons pour obtenir les paramètres d'un signal contenant M exponentielles complexes.
- Elle fournit des résultats exacts (en théorie) si le signal n'est pas bruité.
- En pratique, l'estimation des modes z_i est très sensible au bruit : un faible bruit engendre de grandes déviations des valeurs estimées $\hat{z}_i$.



(1) RSB = ∞



(2) RSB = 60 dB

[Prony] Signal avec 2 sinusôides réelles ($M = 4$) de fréquences $\{0.1, 0.15\}$ et $N = 20$

Amélioration...

Un moyen de réduire cette sensibilité est de combiner l'algorithme de Prony à une estimation au sens des moindres carrés quand $N \geq 2M$.

Introduction

Modèle exponentiel complexe

Méthode de Prony

Améliorations de la méthode de Prony

Moindres carrés

Décomposition en valeurs singulières

Principe de l'algorithme LS-Prony

- Dans la première étape (estimation des a_i), on remplace le système d'équations (carré) par un système avec **plus d'équations que d'inconnus** (lignes $\geq$ colonnes) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \cdots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-M-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y \Rightarrow \hat{a} = -(Y^H Y)^{-1} Y^H y$$

Principe de l'algorithme LS-Prony

- Dans la première étape (estimation des a_i), on remplace le système d'équations (carré) par un système avec **plus d'équations que d'inconnus** (lignes $\geq$ colonnes) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \dots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \dots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \dots & x(N-M-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y \Rightarrow \hat{a} = -(Y^H Y)^{-1} Y^H y$$

- On fait de même dans la troisième étape (estimation des h_i) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{z}_1^0 & \hat{z}_2^0 & \dots & \hat{z}_M^0 \\ \hat{z}_1^1 & \hat{z}_2^1 & \dots & \hat{z}_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{N-1} & \hat{z}_2^{N-1} & \dots & \hat{z}_M^{N-1} \end{bmatrix}}_{\hat{Z}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix}}_h \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_x \Rightarrow \hat{h} = (\hat{Z}^H \hat{Z})^{-1} \hat{Z}^H x$$

Estimation des paramètres du modèle : moindres carrés - Prony

Principe de l'algorithme LS-Prony

- Dans la première étape (estimation des a_i), on remplace le système d'équations (carré) par un système avec **plus d'équations que d'inconnus** (lignes $\geq$ colonnes) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(M-1) & x(M-2) & \cdots & x(0) \\ x(M) & x(M-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-M-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(M) \\ x(M+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y \Rightarrow \hat{a} = -(Y^H Y)^{-1} Y^H y$$

- On fait de même dans la troisième étape (estimation des h_i) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{z}_1^0 & \hat{z}_2^0 & \cdots & \hat{z}_M^0 \\ \hat{z}_1^1 & \hat{z}_2^1 & \cdots & \hat{z}_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{z}_1^{N-1} & \hat{z}_2^{N-1} & \cdots & \hat{z}_M^{N-1} \end{bmatrix}}_{\hat{Z}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_M \end{bmatrix}}_h \approx \underbrace{\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_x \Rightarrow \hat{h} = (\hat{Z}^H \hat{Z})^{-1} \hat{Z}^H x$$

- La résolution des 2 systèmes d'équations est faite au sens des moindres carrés :

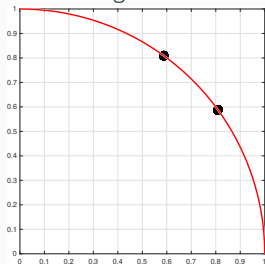
$$\hat{a} = -(Y^H Y)^{-1} Y^H y, \quad \hat{h} = (\hat{Z}^H \hat{Z})^{-1} \hat{Z}^H x \quad (6)$$

Estimation des paramètres du modèle : SVD - Prony

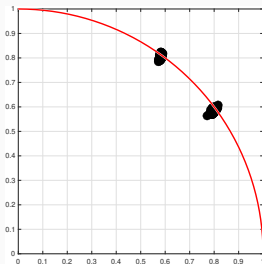
- L'algorithme LS-Prony donne les mêmes résultats que Prony en l'absence de bruit; il est meilleur en présence d'un bruit raisonnable.

Estimation des paramètres du modèle : SVD - Prony

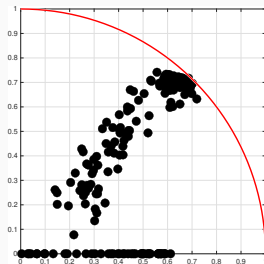
- L'algorithme LS-Prony donne les mêmes résultats que Prony en l'absence de bruit; il est meilleur en présence d'un bruit raisonnable.
- Ses performances baissent rapidement lorsque la puissance du bruit augmente.



(1) RSB = 60 dB



(2) RSB = 40 dB

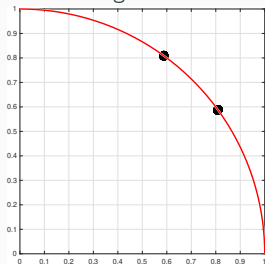


(3) RSB = 20 dB

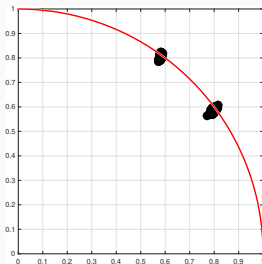
[LS-Prony] Signal avec 2 sinusôides réelles ($M = 4$) de fréquences $\{0.1, 0.15\}$ et $N = 20$

Estimation des paramètres du modèle : SVD - Prony

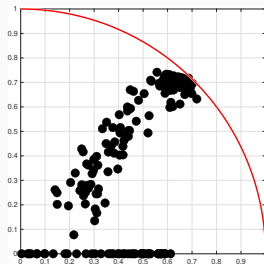
- L'algorithme LS-Prony donne les mêmes résultats que Prony en l'absence de bruit; il est meilleur en présence d'un bruit raisonnable.
- Ses performances baissent rapidement lorsque la puissance du bruit augmente.



(1) RSB = 60 dB



(2) RSB = 40 dB



(3) RSB = 20 dB

[LS-Prony] Signal avec 2 sinusôides réelles ($M = 4$) de fréquences $\{0.1, 0.15\}$ et $N = 20$

Amélioration...

Quand le bruit est fort, les méthodes les plus efficaces sont les méthodes de « sous-espaces » qui sont basées sur la décomposition en valeurs singulières (SVD), e.g. MUSIC, ESPRIT, SVD-Prony, Matrix Pencil, ...

Principe de l'algorithme SVD-Prony [Kumaresan & Tufts, 1989]

- La modification apportée par SVD concerne l'estimation des a_i (et z_i).
- On augmente le nombre de colonnes de la matrice Y de M à $p \geq M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \cdots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y$$

Estimation des paramètres du modèle : SVD - Prony

Principe de l'algorithme SVD-Prony [Kumaresan & Tufts, 1989]

- La modification apportée par SVD concerne l'estimation des a_i (et z_i).
- On augmente le nombre de colonnes de la matrice Y de M à $p \geq M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \cdots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y$$

- Décomposition en valeurs singulières (SVD) de Y :

$$Y = \sum_{k=1}^{\min(p, N-p)} \sigma_k u_k v_k^H = USV^H, \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$U \in \mathbb{C}^{(N-p) \times (N-p)}$: matrice des vecteurs singuliers à gauche

$V \in \mathbb{C}^{p \times p}$: matrice des vecteurs singuliers à droite

$S \in \mathbb{R}^{(N-p) \times p}$: matrice des valeurs singulières rangées par ordre décroissant

Principe de l'algorithme SVD-Prony [Kumaresan & Tufts, 1989]

- La modification apportée par SVD concerne l'estimation des a_i (et z_i).
- On augmente le nombre de colonnes de la matrice Y de M à $p \geq M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \dots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \dots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \dots & x(N-p-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y$$

- Décomposition en valeurs singulières (SVD) de Y :

$$Y = \sum_{k=1}^{\min(p, N-p)} \sigma_k u_k v_k^H \Rightarrow \hat{Y} = \sum_{k=1}^M \sigma_k u_k v_k^H$$

- On met à 0 les valeurs singulières de σ_{M+1} à σ_p pour avoir l'approx. $\hat{Y}$.

Principe de l'algorithme SVD-Prony [Kumaresan & Tufts, 1989]

- La modification apportée par SVD concerne l'estimation des a_i (et z_i).
- On augmente le nombre de colonnes de la matrice Y de M à $p \geq M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \cdots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y$$

- Décomposition en valeurs singulières (SVD) de Y :

$$Y = \sum_{k=1}^{\min(p, N-p)} \sigma_k u_k v_k^H \Rightarrow \hat{Y} = \sum_{k=1}^M \sigma_k u_k v_k^H$$

- On met à 0 les valeurs singulières de σ_{M+1} à σ_p pour avoir l'approx. $\hat{Y}$.
- Les coefficients a_i sont estimés en remplaçant Y par son approx. de rang réduit $\hat{Y}$:

$$\hat{a} = -(\hat{Y}^H \hat{Y})^{-1} \hat{Y}^H y. \quad (7)$$

Estimation des paramètres du modèle : SVD - Prony

Principe de l'algorithme SVD-Prony [Kumaresan & Tufts, 1989]

- La modification apportée par SVD concerne l'estimation des a_i (et z_i).
- On augmente le nombre de colonnes de la matrice Y de M à $p \geq M$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(p-1) & x(p-2) & \cdots & x(0) \\ x(p) & x(p-1) & \cdots & x(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-2) & x(N-3) & \cdots & x(N-p-1) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}}_a \approx - \underbrace{\begin{bmatrix} x(p) \\ x(p+1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}}_y$$

- Décomposition en valeurs singulières (SVD) de Y :

$$Y = \sum_{k=1}^{\min(p, N-p)} \sigma_k u_k v_k^H \Rightarrow \hat{Y} = \sum_{k=1}^M \sigma_k u_k v_k^H$$

- On met à 0 les valeurs singulières de σ_{M+1} à σ_p pour avoir l'approx. $\hat{Y}$.
- Les coefficients a_i sont estimés en remplaçant Y par son approx. de rang réduit $\hat{Y}$:

$$\hat{a} = -(\hat{Y}^H \hat{Y})^{-1} \hat{Y}^H y. \quad (7)$$

- Les racines du polynôme $A(z) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \dots + \hat{a}_p z^{-p}$ qui correspondent aux modes z_i sont les M racines les plus proches du cercle unité.

Exemple de simulation

- **Simulation** : deux sinusôides réelles de fréquences $\{0.1, 0.15\}$ avec $M = 4$, $N = 20$ et $p = \frac{N}{3} \approx 6$

$$x(n) = \cos(2\pi 0.1n) + \cos(2\pi 0.15n) + e(n), \quad e(n) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Sans bruit (RSB = ∞ , i.e. $\sigma^2 = 0$) :

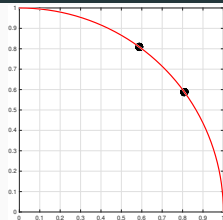
$$U = \begin{bmatrix} -0.57 & -0.09 & \cdots & -0.28 \\ -0.37 & 0.39 & \cdots & -0.11 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -0.31 & 0.34 & \cdots & 0.56 \end{bmatrix}, \quad \text{diag}(S) = \begin{bmatrix} 5.78 \\ 4.17 \\ 2.53 \\ 1.13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.36 & \cdots & 0.04 \\ 0.53 & -0.03 & \cdots & 0.10 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -0.56 & 0 & \cdots & 0.20 \end{bmatrix}.$$

- Avec bruit (RSB = 20 dB) :

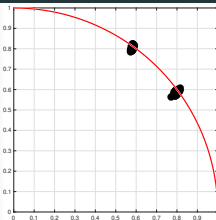
$$U = \begin{bmatrix} -0.58 & -0.11 & \cdots & -0.15 \\ -0.37 & 0.38 & \cdots & -0.56 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -0.31 & 0.37 & \cdots & 0.48 \end{bmatrix}, \quad \text{diag}(S) = \begin{bmatrix} 5.55 \\ 3.96 \\ 2.47 \\ 1.10 \\ 0.34 \\ 0.30 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.29 & 0.37 & \cdots & -0.07 \\ 0.53 & -0.02 & \cdots & 0.28 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -0.56 & 0 & \cdots & 0.14 \end{bmatrix}.$$

- **Conclusion** : en présence d'un bruit blanc, les $p - M = 2$ valeurs singulières les plus faibles augmentent. Les vecteurs singuliers sont moins sensibles au bruit.

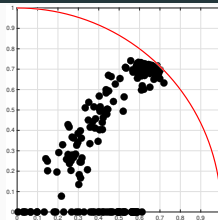
Exemple de simulation



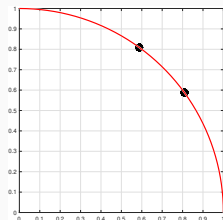
(1) RSB = 60 dB (LS-Prony)



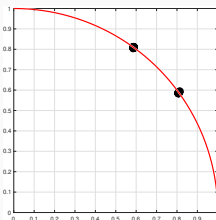
(2) RSB = 40 dB (LS-Prony)



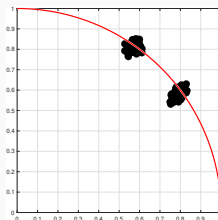
(3) RSB = 20 dB (LS-Prony)



(4) RSB = 60 dB (SVD-Prony)



(5) RSB = 40 dB (SVD-Prony)



(6) RSB = 20 dB (SVD-Prony)

[LS- vs SVD-Prony] Signal avec 2 sinusôides réelles ($M = 4$) de fréquences $\{0.1, 0.15\}$
et $N = 20$